Captain Joni Höma Skript

March 17, 2025

1 Vorwort

Moinsen,
ich habe mich entschlossen einen Großteil des Höma Skriptes zu übersetzen, neu zu formatieren und evtl. mit meinen Anmerkungen zu versehen. Außerdem habe ich gerade am Anfang noch und später bei allem Wichtigen noch ein Beispiel hinzugefügt.
Dabei ist leider immernoch viel Text dabei, aber an manchen Stellen (hoffentlich) anschaulicher formuliert und leserlicher geschrieben.
Man wird merken, dass ich am Anfang noch sehr viel Lust und Motivation hatte das Skript so zu schreiben, dass es jeder Abiturient etc. verstehen könnte. Das habe ich mit zunehmender Komplexität der Themen unterlassen und oft nur das Guraus Skript übersetzt und meine Anmerkung dazugeschrieben.
Wenn Ihr beim Lesen ein Thema nicht versteht, aber später eine andere gute Erklärung findet. Bitte meldet euch bei mir, dann kann ich alternative Erklärungen noch in das Skirpt hinzufügen, damit hoffentlich irgendwann für jeden eine gute Erklärung dabei ist.

Desweiteren hab ich spätestens nach den Zahlen bemerkt, dass die Beweise zu verstehen sehr viel Zeit kostet und nicht wirklich zielführend ist. Deswegen sind die Beweise ab dort etwas kreativ geworden. Nehmt das bitte nicht zu ernst, sondern lacht darüber xD

Und jetzt folgt mir auf Insta oder so und denkt dran:

Too much thinking kills the joy! ~Captain Joni

2 Mengen

Mengen sind eine Kollektion an Dingen, erstmal egal welche. Man kann sich Mengen also als Eimer vorstellen. In diesem Eimer können sich dann weitere Dinge befinden.
Eine Menge X (Mengen werden meist mit Großbuchstaben notiert) kann also "Dinge" enthalten. Diese Dinge, die sich in einer Menge befinden nennen wir **Elemente**.

Also wenn du im Sommer deinem Vater hilfst, Walnüsse vom Boden aufzusammeln und in einen Eimer legst. Ist der Eimer eine Menge an Nüssen. Die Nüsse sind dann die jeweiligen Elemente.
Formal: Eine Menge X enthält Elemente x, (kleines x). Notiert wird das $x \in X$, wobei $\in$ bedeutet, dass sich x in X befindet.

$$Nuss_3 \in Eimer$$

Die einzige Frage, die man sich stellen kann/sollte ist, ob ein Element zu einer Menge gehört oder nicht. Das führt dazu, dass $\{2\} = \{2, 2\}$ die gleichen Mengen sind, nähmlich die Menge mit dem Element "2". Die Notaion über s.g. Mengenklammer ist üblich, um konkrete Mengen zu notieren.

$$\text{Mengenklammer} = \{\}$$

2.1 Mengenkomprehension

Man kann Mengen über Aussageformen definieren.

D.h. $\{x \in X | A(x)\}$, wobei A(x) eine Aussage ist, die von x abhängt.
Gelesen wird das:
Die Menge ("$\{\}$") von allen x, die sich in X befinden ("$x \in X$"), für die die Aussage A wahr ist ("A(x)"). (Man sagt auch, alle x in X, für die gilt ("|") A(x) ist wahr)

2.1.1 Beispiel

$$A = \{y \in Y | \text{y hat rote Haare}\}$$

Wobei die Menge Y, die Menge aller Menschen ist. D.h. die Menge A sind alle Menschen, die rote Haare haben.

$$B = \{b \in \mathbb{N} | \text{b ist durch 2 teilbar}\}$$

Die Menge B sind alle alle natürlichen Zahlen, die durch 2 teilbar sind. Also alle geraden natürlichen Zahlen.

2.2 Mengenschnitt

Der Schnitt zweier Mengen sind genau die Elemente, die in beiden Mengen enthalten ist.

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \land x \in B\}$$

Es muss also die Bedingung erfüllt sein, dass x in beiden Mengen A UND B liegen muss.

2.2.1 Beispiel

Stell dir die Menge aller rothaarigen Menschen vor. Und die Menge aller Menschen, die in Heidelberg studieren. Der Schnitt dieser beiden sehr großen Mengen, ist die Menge an allen roothaarigen Menschen, die in HD studieren.

2.3 Zermelo-Fränkel Axiome

Da wir jetzt ein besseres Intuitives Verständniss von Mengen haben, widmen wir uns nun der Zermelo Fränkel Mengenlehre und lernen die Regeln der Mengen kennen.

Wir notieren die leere Menge, also die Menge, welche keine Elemente hat mit $\varnothing$

2.3.1 Extension

Eine Menge ist durch ihre Elemente definiert. D.h. $A = \{1, 2, 4\}$ und $B = \{2, 1, 4\}$ sind die selben Mengen. Wir schreiben A = B .
Formal:

$$\forall a \in A \text{ gilt } a \in B \ \wedge \ \forall b \in B \text{ gilt } b \in A \Leftrightarrow A = B$$

. Also: Für alle ("$\forall$") Elemente a in A gilt a ist in B UND ("$\wedge$") für alle b in B gilt b ist auch in A, dann ist A = B.
Wenn $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$, dann ist B eine Untermenge von A. Wir lesen: Für alle b in B folgt, dass b auch in A ist. Notiert wird das als:

$$B \subseteq A$$

Bemerke, die Implikation $\Rightarrow$ geht nur in eine Richtung, d.h. alle Elemente aus B sind auch in A, aber A könnte mehr Element haben als B, deswegen ist B nur eine Untermenge. A muss aber nicht zwinged größer sein.

2.3.2 Paarung

Wenn A und B Mengen sind, dann ist $\{A, B\}$ auch eine Menge.
Wir bilden also Mengen von Mengen (z.B ein LKW, der ganz viele Eimer transportiert, die Eimer selbst sind Mengen, aber der LKW ist die Menge aller Eimer.

2.3.3 Mengenkomprehesion

Sei A eine Menge und P(x) eine Eigenschaft der Elemente in $x \in A$, dann ist

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

eine Menge. (siehe Mengenkomprehension)

2.3.4 Mengenvereinigung

Formal das das basically eine Auspackfunktion von Mengen von Mengen. Wenn ich also einen LKW voll mit Eimern gefüllt mir Nüssen habe, ist die Mengenvereinigung das ausleeren der Eimer in en LKW, sodass alle Nüsse im LKW liegen.

$$\bigcup\{A, B\} = \{x \mid x \in A \ \vee x \in B\} = A \cup B$$

Alle Elemente x , für die gilt x ist in A ODER ("$\vee$") x ist in B.
Beispiel:

$$\bigcup\{\{1,2\}\{3,4,2\}\} = \{1,2,3,4\}$$

2.3.5 Potenzmenge

Für jede Menge A existiert die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, welches die Menge aller Teilmengen von A ist. Also

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$$

.
Da jede Menge die Leee Menge $\varnothing$ enthält, ist $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ für egal welches A. Also jede Potenzmenge hat immer die leere Menge als Element.

2.3.6 Unendlichkeitsding (Infinity)

Sei A eine Menge, dann ist $\{A\}$ auch eine Menge.
Also die Menge mit der Menge A, wobei die Menge A das einzige Element der Menge $\{A\}$ ist), die wir erhalten, wenn wir A mit sich selbt Paaren.

Also gibt es auch einen "Succesor"/Nachfolger mit $(A) = A \cup \{A\} = \bigcup\{A, \{A\}\}$ Also exisitert auch eine Menge B mit $\varnothing \in B$ und $A \in B \Rightarrow S(A) \in B$

Siehe hierzu Konstruktion der Natürlichen Zahlen

2.3.7 Replacement

Das Bild einer Menge unter einer Funktion ist eine Menge. Also

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

ist eine Menge.

2.3.8 Regularität

Jede nichtleere Menge A enthält ein Element disjunkt von A. Zwei Mengen sind disjunkt, wenn Ihr Schnitt leer ist, bzw. die leere Menge. Also:

$$\forall A \neq \varnothing \ \exists x \in A \mid x \cap A = \varnothing$$

Das impliziert, das keine Menge sich selbst enthalten kann. Für jede Menge A ist $\{A\}$ eine Menge, die ein element disjunkt von $\{A\}$ enthalten muss. Da $\{A\}$ nur A als Element hat, folgt dass $A \cap \{A\} = \varnothing$. Also: $A \notin A$
So schützen wir uns vor dem Russel Paradoxon.

2.4 Mengendifferenz

Die Mengendifferenz sind alle Elemente, die in der ersten Menge enthalten sind ohne all die Elemente in der zweiten Menge.

$$X \backslash Y = \{x \in X | x \notin Y\}$$

Man schneidet quasi die Menge Y aus der Menge X heraus.

2.4.1 Beispiel

Wenn X die Menge aller Menschen ist, und Y die Menge aller Norweger. Dann ist $X\backslash Y$ die Menge aller nicht Norweger, also alle Menschen AUßER Norweger.

2.5 Kartesisches Produkt

Das Kartesische Produkt zweier nicht-leere Mengen X und Y ist die Menge aller geordneten Paare:

$$X \times Y = \{(x,y) | x \in X \land y \in Y\}$$

2.5.1 Beispiel

Das kartesische Produkt der Mengen Karo, Pik, Herz, Kreuz und die Menge von der 2 bis zum Ass, ist gerade die Menge aller Spielkarten in einem Skatset.

3 Funktionen

Eine Funktion von einer Menge X in eine Menge Y ist die Zuordnung von Elementen in Y zu jedem x in X Also

$$f : X \to Y$$

Dabei ist X der Definitionsbereich und Y der Wertebereich. Eine Funktion, deren Definitionsbereich und Wertebereich notieren wir mit: $f : X \to Y$, den Wert einer Funktion mit dem Elelemt $x \in X$ notieren wir $f(x) \in Y$, dabei nennt man x das Argument.

3.0.1 Beispiel

Die Identitätsfunktion $id : X \to X$ welche jedes Element aus X auf sich selbst mapped. Also:

$$\forall x \in X \;\; id_x(x) = x$$

Wir nennen zwei Funktionen f und g gleich, wenn sie den gleichen Definitions-und Wertebereich haben und für jedes x aus dem Definitionsbereich der Funktionswert übereinstimmt.

$$f = g, \;\text{wenn} f, g : X \to Y \text{und } f(x) = g(x) \;\; \forall x \in X$$

3.1 Komposition von Funktionen

Die Komposition von Funktionen ist die Hintereinnaderausführung von Funktionen.
Sei dazu $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$, dann ist

$$g \circ f : X \to Z$$

. Es wird also zuerst f angewandt, um von X zu Y zu kommen, und dann g von Y nach Z. Es gilt:

$$\forall x \in X, \;\; g \circ f(x) = g(f(x)) \in Z$$

3.2 Bild einer Funktion

Das Bild einer Teilmenge $U \subseteq X$ unter einer Funktion $f : X \to Y$ ist die Menge:

$$f(U) = \{y \in Y | f(x) = y\}$$

Also alle y in Y, die von der Funktion f "getroffen" werden.

3.3 Urbild

Das Urbild einer Teilmenge in der Zielmenge, $V \subseteq f(X) = Y$ ist die Menge:

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} \subseteq X$$

3.4 Injektivität

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt injektiv, wenn es für jedes $y \in Y$ **genau ein** $x \in X$ gibt, mit f(x) = y. Also:

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

3.4.1 Beispiel

Die Funktion $f(x) = x$, ist injektiv, da jedes y nur ein x hat, welches dieses y trifft.
Die Funktion $f(x) = x^2$ ist **nicht** injektiv, weil es für ein y mehrere x gibt, die es treffen (1 und -1 treffen beide die 1 in Y).

3.5 Surjektivität

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt surjektiv, wenn die Funktion, den ganzen Wertebereich trifft, also jedes $y \in Y$ mindestens einmal getroffen wird.
Also:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X | f(x) = y \text{ oder schneller: } f(X) = Y$$

3.6 Bijektivität

Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, heißt bijektiv.
Eine Bijektion $f : X \to Y$ hat ein wohldefiniertes Inverses $f^{-1} : Y \to X$.
Es gilt:

$$f^{-1} \circ f = id_x \text{und} f \circ f^{-1} = id_y$$

Wobei id_x die Identität auf X ist, also jedes x auf sich selbst abbildet. Und id_y jedes y auf sich selbst.

4 Auswahlaxiom

Das Auswahlaxiom besagt, dass es für jede Menge an nichtleeren Mengen, $\mathcal{X}$ eine Auswahlfunktions existiert mit

$$f : \mathcal{X} \to \bigcup \mathcal{X}$$

,welche jede Menge $X \in \mathcal{X}$ einem Element $x \in X$ zuordnet.
Anders formuliert bedeutet das, dass für jede Menge $\{X_\alpha \neq \varnothing | \alpha \in A\}$ eine weitere Menge existiert, mit genau einem Element pro X_α, also $\{x_\alpha \in X_\alpha | \alpha \in A\}$.

5 Zweistellige Relationen

Elemente von Mengen können zueinander in mehreren Arten und Weisen in Relation stehen.

5.1 Äquivalenzrelation

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X, wenn:

- reflexiv: $\forall x \in X$ gilt: $x \sim x$
- symmetrisch: $\forall x, y \in X$ gilt: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- transitiv: $\forall x, y, z \in X$ gilt: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

5.2 Ordnungsrelation

$\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf X, wenn:

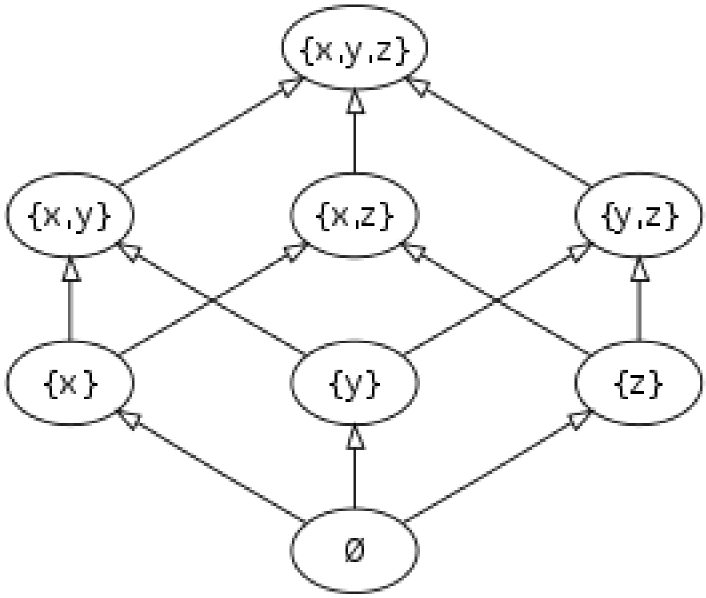
- reflexiv: $\forall x \in X$ gilt: $x \leq x$
- antisymmetrisch: $\forall x, y \in X$ gilt: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow y = x$
- transitiv: $\forall x, y, z \in X$ gilt: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Eine Menge mit einer Ordnungsrelation, heißt partiell geordnete Menge oder **Poset**. Ein Poset kann Elemente enthaltenl, die nicht "geordnet sind", die man also nicht vergleichen kann. Also: $\exists x, y \in X \mid x \nleq y$ und $y \nleq x$. Wenn aber jedes Element vergleichbar ist, nennt man diese Relation auch "total". Wenn eine Relation auch total ist, heißt die Menge totalgeordnete Menge.

- total: $\forall x, y \in X$ gilt: $x \leq y \vee y \leq x$

5.2.1 Beispiel:

Die Teilmengenrelation auf einer Potenzmenge ist hierfür ein gutes Beispiel. Siehe Bild:



Obiges Diagramm ist ein Hassediagramm.

5.3 strikte Ordnungsrelation

$<$ ist eine strikte Ordnungsrelation auf X, wenn:

- irreflexiv: $\forall x \in X \mid x \nless x$
- asymmetrisch: $\forall x, y \in X$ gilt: $x < y \Rightarrow y \nless x$
- transitiv: $\forall x, y, z \in X$ gilt: $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

Für jede Ordnungsrelation $\leq$ gibt es eine strikte Ordnungsrelation $<$ definiert durch, $x < y$ wenn $x \leq y$ und $x \neq y$
Eine totale strikte Ordnungsrelation ist eine stirkte Ordungsrelation, die total ist:

- total: $\forall x, y \in X$ gilt: $x < y \vee y < x$

5.4 Wohlordnende Relation / Wellordering

$\leq_w$ ist eine wohlgeordnete Relation auf X, wenn:

- total Ordnung: $\leq_w$ ist eine Totalordnung auf X.
- kleinstes Element: Jede nichtleere Teilmenge von X hat ein kleinstes Element, also

$$\forall Y \subseteq X, Y \neq \emptyset, \exists y \in Y \mid \forall z \in Y, y \leq_w z$$

Ein endliches Poset kann man als Hassediagramm darstellen. Beispiel:

5.5 Lemma vong Zorn

Eine Kette T in einer geordneten Menge X ist eine Teilmenge $T \subseteq X$, die total geordnet ist.
Im Hasse Diragram wäre das die Teilmenge, die genau einen Weg von unten nach oben dartellt.
Also:

$$\forall x, y \in T \text{ gilt } x \leq y \ \vee \ y \leq x$$

Wenn jede einzelne Kette T in X eine Obere Schranke besitzt, also

$$\forall T, \exists x_T \in X \text{ sodass } \forall x \in T, x \leq x_T$$

.
Dann hat X mindestens ein maximales Element. Also:

$$\exists x_X \in X \text{ sodass } \forall x \in X \backslash \{x_X\}, x_X \nleq x$$

Dieses Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

6 Zahlen

Im folgenden wirds um Zahlen gehen.

7 Natürliche Zahlen

Man startet bei der 0 und addiert einfach itterativ 1 dazu. Man kann die Natürlichne Zahlen auch mithilfe von Mengen konsturieren. Diese Konsturktion generalisieren wir später mithilfe der Ordinalszahlen.

7.1 Konstruktion der Natürlichen Zahlen

Mit dem Axiom der Unendlichkeit, können wir sagen, dass es Mengen gibt, die die leere Menge enthalten und unter der Nachfolgerfunktion abgeschlossen sind. *(Solche Mengen heißen Induktiv)* . Die kleinste solche Menge ist die Menge der Natürlichen Zahlen. Wir definieren:

- Die Null sei die Leere Menge: $0 = \varnothing$
- der Nachfolger S(a) von egal welcher Menge ist: $S(a) = a \cup \{a\}$
- Wir fangen nun an durchzunummereiren:

$$\begin{gathered} 0 = \varnothing \\ 1 = 0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\ 2 = 1 \cup \{1\} = \{1, 0\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ \vdots \end{gathered}$$

- $\mathbb{N}$ ist also die Menge mit $\varnothing$ und all seinen Nachfolger.

Wir gönnen $\mathbb{N}$ jetzt noch weitere Struktur:

- **Addition**: Die addition der Natürlichen Zahlen ist die interne binäre Operation *(basically eine Funktion, nur heißt f jetzt +)* $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadruch definiert, dass $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + 0 = a$ und $a + S(b) = S(a + b)$
- **Multiplikation**: Die multiplikation der Natürlichen Zahlen ist die interne binäre Operation $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadruch definiert, dass $\forall a, b \in \mathbb{N}, a * 0 = 0$ und $a * S(b) = a + a * b$
- **Totalordnung**: Die Natürlichen Zahlen sind total geordnet mit der Ordnungsrelation $a \leq b, \text{wenn} a \in b \vee a = b$. Es existiert also auch ein $c \in \mathbb{N}$ sodass $a + c = b$. Diese Totalordnung ist sogar Wohlgeordnert.

8 Ordinalzahlen und Cardinalzahlen

Ordinalzahlen sind quasi Durchnummerierungen. Also die Zuweisung von einem ersten Element, einem zweiten element und einem dritten etc. Ordinale sind total und wohlgeordnet.

8.1 Definition Ordninale

Ein Ordinal (Ordnungszahl) λ ist die Menge, die genau die Ordnungszahlen strikterweise kleiner als sie selbst enthält, bezeichnet mit $\lambda = [0, \lambda)$. Dabei ist zu beachten, dass λ selbst kein Element von λ ist.
Genauer gesagt, ist eine Ordnungszahl λ eine transitive, streng wohlgeordnete Menge nach Mengenmitgliedschaft.

8.1.1 Beispiel

Schauen wir uns die Ordnungszahl 4 an.
Nach der obigen Definition ist 4 die Menge aller Ordnungszahlen, die strikt kleiner als 4 sind. Da 0 die kleinste Ordnungszahl ist, ist 4 die Menge:

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

Beachte, dass 4 selbst nicht in dieser Menge enthalten ist. Die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ enthält nur die Ordnungszahlen, die strikt kleiner als 4 sind.

Weitere Beispiele:

- Ordnungszahl 0 (ω): Die Menge aller Ordnungszahlen kleiner als 0, d. h. die leere Menge: 0 = $\{\}$ = $\varnothing$.
- Ordnungszahl 1 ($\omega + 1$): Die Menge aller Ordnungszahlen kleiner als 1, d. h. die Menge $\{0\}$.
- Ordnungszahl 3 ($\omega + 3$): Die Menge aller Ordnungszahlen kleiner als 3, d. h. die Menge $\{0, 1, 2\}$.

Es ist wichtig zu beachten, dass diese Definition nur für strikt wohlgeordnete Mengen gilt.

Weiter:

- $\in$ ist eine strikte wohlordnung auf den Elementen in λ
  - $\forall x \in \lambda, x \notin x$
    (Da wir bei der Definition von λ gesagt haben wir schließen das λ aus. Weil offenes Intervall: λ= [0,λ))
  - $\forall x, y \in \lambda$ wenn $x \neq y$ ist $x \in y \vee y \in x$
    Wenn $x \neq y$ ist, dann heißt dass, dass eines der beiden "größer" ist, also eine Höhere Ornundszahl ist und demnach entweder $x \in y$ oder $y \in x$ sein muss..
    Bsp: 5 = [0,5) ist "größer" als 4 = [0,4). Da wir es mit Mengen zu tun haben, die wiederum Mengen als Elelemte haben können, ist hier die 4 $\in$ 5. (siehe Definition Ordnugnszahl)

- $\forall x, y, z \in \lambda$ wenn $x \in y \wedge y \in z$ dann $x \in z$
  Das Folgt direkt aus der transitivität der Mengeninklusion.
- $\forall A \subseteq \lambda, A \neq \varnothing, \exists x \in A$ sodass $\forall y \in A$ entweder $x \in y \vee x = y$
  Das ist einfach nur Fancy ausgedrückt, dass es in jeder Teilmenge von λ immer eine Art minimales Element gibt.
  Bsp: Sei $\lambda = 5$, also $\lambda = \{0,1,2,3,4\}$ Dann ist für die Teilmenge $A_1 = \{0,1,2\}$, die Null das minimalste Element, und für die Teilmenge $A_2 = \{2,3,4\}$ ist die 2 das Minimalste Element.

- λ ist transitiv, also $\forall x \in \lambda \Rightarrow x \subset \lambda$
  In dem Fall von Ordnungszahlen ist es anscheinend gang und gebe auch von der Transitivität einer Menge zu sprechen, die genau diese Eigentschaft hat.

8.1.2 Eigenschaften Ordinale

Für jede Ordnungszahle $\lambda = [0,\lambda)$ notieren wir den Nachfolger $\lambda + 1 = \lambda \cup \{\lambda\}$.
Bsp: 5 = {0,1,2,3,4}, dann ist 5+1 =$\{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\}$ = {0,1,2,3,4,5} = 6.

Die Ordnungszahlen selbst sind strikt Wohlgeordnet mithilfe der Mengeninklusion. D.h. für zwei Ordnungszahlen β und λ folgt $\beta < \lambda$ wenn $\beta \in \lambda$. Zwei Ordnungszahlen stimmen also überein, oder sind strikt größer/kleiner.

Es gilt natürlich immer $\bigcup \lambda \subset \lambda$.

Man kann zeigen, dass jede Union von Mengen an Ordnungszahlen wieder eine Ordnungszahl ist und jede Menge an Ordnugnszahlen eine kleinste obere Schranke (Supremum) hat. Dieses Supremum kann man erhalten, wenn man die Union aller Ordnungszahlen in der Menge einer Ordnungszahl nimmt.

Beispiel

Gegeben sei A = {0,1,3}, wobei die 0,1,3 Ordnungszahlen sind. Dann ist A = {0,{0},{0,1,2}}, also ist $\bigcup A = 0 \cup \{0\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\}$ wobei 0,1,2 Ordnungszahlen sind, also das ganze der Ordnungszahl 3 entspricht. $\bigcup A = 3$.

Also für $\lambda = 5 = \{0,1,2,3,4\}$ ist das Supremum = 4.
Das Supremum ist immer als $\leq$ definiert, und durch die Union aller Ordnunszahlen in der Menge erhalten wir das Supremum, siehe Beispiel eins weiter oben.

Eine Limit Ordnungszahl ist eine Ordnungszahl, die nicht 0 ist oder der Nachfolger einer Ordnungszahl. Limit Ordnungazahlen treten als Suprema auf von Mengen, mit allen Ordninalzahlen kleiner als das Limit Ordinal.

λ its ein Limit Ordinal, wenn $\forall \beta < \lambda, \exists \gamma$ sodass $\beta < \gamma < \lambda$. Also jedes Ordinal ist entweder $0 = \varnothing$, ein Nachfolgeordnial oder ein Limitordinal. Für Limit Ordinale gilt:

$$\lambda = \bigcup \lambda$$

Ein Ordnial $\alpha > 0$ heißt Limit Ordnial, genau dann wenn es keinen direkten "Vorfahren" (predecessor) hat. Also wenn es kein Ordinal β gibt mit der eigentschaft $\beta + 1 = \alpha$.

Das erste Limit Ordnial ist ω

Per Konsturkion sind die Natürlichen Zahlen Ordinale. Das kleinste Ordinal, welches größer als alle Natürlichen Zahlen ist, nennen wir ω. Und ist natürlich ein Limit Ordinal.
ω ist dabei einfach nur die wohlgeordnete unendliche Menge aller Natürlichen Zahlen.

Um zu überprüfen, dass ω ein Limit Ordinal ist betrachten wir folgenden Fall:
Per Definition ist $n < \omega \Rightarrow n \in \mathbb{N}$, aber $n < n + 1 \in \mathbb{N}$, da nun n+1 auch eine Natürliche Zahl ist gilt: $n + 1 < \omega$.
Der Nachfolger des limit Ordninals ω ist $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$

Man kann sich das ω auch Konsturieren, wenn man sich die Natürlichen Zahlen, als Alphabet vorstellt und sich dann alle "zweistelligen" Wörter anschaut und diese Lexigraphisch Ordnet.
Also: das Erste "Wort" ist die 0 mit der Stelle (0,0) und dann die 1 mit (0,1).
Also die "Position" der Natürlichen Zahlen. Mit dieser Logik wäre ω die Stelle (1,0), weil an dieser Stelle alle Natürlichen Zahlen im zweiten Index einmal durchlaufen sind.
Weiter noch gilt dann: $\omega + 1 \cong (1, 1)$ oder z.B $\omega + 5 \cong (1, 5)$.
Um den ersten Index also zu erhöhen, müssen wir also im zweiten Index die Natürlichen Zahlen ganz "durchlaufen" lassen. Mit jedem "durchlaufen lassen" der Natürlcihen Zahlen im zweiten Index wird der erste Index um einen Ingrement erhöht.
D.h. konkret: $\omega \cdot 2$ wäre die Stelle: (2,0) und $\omega \cdot 3 + 4 \cong (3, 4)$.
Die kleinste Ordnungszahl größer, als alle $\omega \cdot n$ wird notiert mit ω^2
Ist ja auch intuitiv klar, dass $\omega \cdot \omega$ größer ist als jedes $\omega \cdot n$, wenn n eben eine Natürliche Zahl ist, und ω größer ist als jede natürliche Zahl.

8.1.3 Klasse der Ordinale

Die Klasse aller Ordnungszahlen ist **KEINE** Menge, sonder eine Klasse. Denn:

- Nehmen wir zunächst an, dass die Klasse aller Ordnungszahlen (bezeichnen wir sie mit "Ord") tatsächlich eine Menge ist.
- Da Ord eine Menge ist (gemäß unserer Annahme), muss sie durch die Zugehörigkeitsbeziehung $\in$ (Element von) wohlgeordnet sein. Das bedeutet, dass jede nicht-leere Teilmenge von Ord eine obere Schranke (Supremum) besitzt.
- Wir definieren eine neue Ordnungszahl "λ" als das Supremum aller Ordnungszahlen in Ord. Mit anderen Worten, jede Ordnungszahl, die Sie sich vorstellen können, ist kleiner oder gleich λ.
- Hier entsteht der Widerspruch. Da Ord per Annahme eine Menge ist, muss sie selbst eine Ordnungszahl und somit ein Element von Ord sein. Das bedeutet, dass λ, das Supremum aller Ordnungszahlen, auch Ord enthalten muss (da Ord eine Ordnungszahl ist). Also gilt $\lambda \in$ Ord.

- Aber bedenke, λ ist ja als das Supremum aller Ordnungszahlen in Ord definiert. Wenn λ selbst ein Element von Ord ist, dann kann es nicht das Supremum sein. Denn es gäbe dann ein Element (nämlich λ) in Ord, das größer ist als alle anderen Elemente, die wir für das Supremum betrachtet haben. Dies widerspricht unserer ursprünglichen Definition von λ.

Das Auswahlaxiom impliziert, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Indem man nun einen Element auswählt, welches mit der Auswahlfunktion auf der Teilmenge aller Elemente, die noch nichts ausgewählt worden sind.
Genauer nimmt man f als Auswahlfunktion definiert auf den nichtleeren Teilmengen von einer Menge A, dann definieren wir uns für jede Ordnungszahl α ein Element $a_\alpha = f(A \backslash \{a_\xi\} \mid \xi < \alpha)$, sofern $A \backslash \{a_\xi \mid \xi < \alpha\} \neq \varnothing$ Dann ist das Auflisten der Elemente von A mit der Ordnung $\{a_\alpha\}_\alpha$ eine Wohlordnung auf A.
Für jede Wohlgeordnete Menge S, existiert eine ordnungsverträgliche Bijektion zwischen S und genau einem Ordninal. (Das meint quasi nur, dass man jede wohlgeordnete Menge mithilfe von Ordninals durchzählen kann).

Cardinalzahlen sind eine generalisierung der Natürlichen Zahlen und werden genutzt um die "Größe" von Mengen anzugeben. Zwei Mengen habe die selbe Kardinalität("Größe"), genau dann wenn eine Bijektion zwischen ihnen existiert.
Die Kardinalität einer Menge X ist die kleineste Ordnungszahl, sodass eine Bijektion zwischen der Ordinalzahl und der Menge X besteht. (Diese Bijektion muss nicht zwingend Ordnunsverträglich sein).
Die Kardinalität einer endlichen Menge ist die Anzahl an Elelemten in ihr, also eine Natürliche Zahl. Die transendlichen Kardinalszahlen, oft mit dem Hebreischen Aleph Symbol $\aleph$ und einem Index notiert, beschreiben die "Größe" von undlichen Mengen. Es existiert eine transendliche Folge an Kardinalitätszahlen:

$$0, 1, 2, 3, ..., n, ...\aleph_0, \aleph_1, ..., \aleph_\alpha$$

Wobei die Indicies selsbt α wieder Oordnungszahlen sind.

Die Kardinalität der Natürlichen Zahlen ist die erste transendliche Kardinalszahl $\aleph_0$, welche die kleinste Ordnungszahl ist, sodass sie größer ist als jede Natürliche Zahl, ω.

Jede Menge mit der Kardinalität $\aleph_0$ heißt abzählbar.

Kardinalzahlen und Ordnungszahlen sind verschiedene Dinge, die Ordnungszahl ω+1 ist verschieden von ω, aber hat immernoch die Kardinalität $\aleph_0$. Gleiches gilt für $\omega + 2, \omega \cdot 2, \omega^2, \omega^\omega$.
Wir notieren die Kardinalität einer Mene mit —X—, oder # X.
Die Potenzmenge einer Menge X hat die Kardinalität:

$$|P(X)| = 2^{|X|}$$

Es gilt immer, dass die Kardinalität der Potenzmenge strikt größer ist, als die Kardinalität der Menge X (auch im unendlichen Fall).

8.2 Cantor's Theorem

Sei f eine Funktion von der Menge X in seine Potenzmenge P(X). Dann ist f nicht surjektiv und es gilt:

$$|X| < |P(X)|$$

8.2.1 Beweis

Sei $B = \{x \in X | x \notin f(x)\} \subset X$, also ist $B \subset P(X)$.
Angenommen f sei surjektiv. Dann gäbe es ein $y \in X$, sodass f(y) = B. Durch die Bedingung der Menge B ergibt sich dann ein Widerspruch: $y \in B \Leftrightarrow y \notin f(y) = B$.

9 Ganze Zahlen

Informell sind die Ganzen Zahlen konstruiert als $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, ...\}$, wobei -n gerade das Inverse von n, bezüglich der Addition ist.

9.1 Konstruktion

Die Ganzen Zahlen können konstruiert werden als die Quotientenmenge

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$$

wobei ~ eine äquivalenzrelation ist, mit:

$$(a, b) \sim (c, d), \text{wenn } a + d = b + c$$

Die weiteren Verknüpfungen sind dann wie folgt definiert:

- $[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$
- $[(a, b)] \times [(c, d)] = [(a \times c + b \times d, a \times d + b \times c)]$
- $[(a, b)] < [(c, d)], wenn\ a + d < b + c$

Beachte:
[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, a+b)] = [(0,0)], also ist das additive Inverse von [(a,b)] genau [(b,a)], wir notieren nun: [(b,a)] = - [(a,b)].
Wenn $a \geq b$, dann ist a = b + c und [(a,b)] = [(c,0)] = c .
Wenn im Gegenteil: a < b, dann gilt b = a + c und [(a,b)] = - [(b,a)] = -c, welches evidently zur Notation führt:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$$

9.2 Gruppe

Eine Gruppe ist eine Algebraische Struktur, die wie folgt definiert ist.
Eine Gruppe $(G, \circ, e)$ ist eine Menge G mit einer internen zweistelligen Operation (Verknüpfung) $\circ : G \times G \to G$, sodass gilt:

- **neutrales Element:** es existiert ein $e \in G$, sodass $e \circ g = g \circ e = g\ , \forall g \in G$
- **assoziativität:** $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3,\ \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
- **inverse:** für jedes $g \in G$ existiert ein Inverses $g^{-1} \in G$, sodass $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Eine Gruppe heißt Abelsch oder Kommutativ, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

.

9.3 Axiomatische Defintion der Ganzen Zahlen:

($\mathbb{Z}$,+,0) ist die einzige nicht-triviale geordnete abelsche Gruppe, wessen positive Elemente wohlgeordnet sind.

10 Rationale Zahlen

Informell sind die Rationalen Zahlen einfach nur $\frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{Z}$.

10.1 Konstruktion

Wir kontruieren uns die Rationalen Zahlen mithilfe der Quotientenmenge

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) / \sim$$

Wobei eine äquivalenzrelation ist mit:

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \text{ wenn } p_1 \times q_2 = q_1 \times p_2$$

Es gilt: [(p,q)] = [(a × p, a ×q)] für jedes $a \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Es gilt also auch: [(p,q)] = [(-p,-q)].
Es gelten folgende Regeln:

- $[(p_1, q_1)] + [(p_2, q_2)] = [(p_1 \times q_2 + q_1 \times p_2, q_1 \times q_2)]$
- $[(p_1, q_1)] \times [(p_2, q_2)] = [(p_1 \times p_2, q_1 \times q_2)]$
- $[(p_1, q_1)] < [(p_2, q_2)]$, wenn $q_1, q_2 > 0$ und $p_1 \times q_2 < q_1 \times p_2$.

Die Ganzen Zahlen sind in den Rationalen Zahlen eingebettet. (Alle zahlen mit dem Nenner 1, also [(p,1)]).
Wir notieren [(p,q)] = $\frac{p}{q}$.
Das additiv Inverse von x = [(p,q)] ist -x = [(-p,q)].
Das multipolikative Inverse ist [(q,p)], wobei wir hierbei davon ausgehen, dass $p \neq 0$, dass es ein Inverses geben kann. Die Division definieren wir wie folgt:

$$\frac{x}{y} = x \times y^{-1} \;\; \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

10.2 $\mathbb{Q}$ ist in sich Dicht

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist in sich Dicht. Das heißt für jedes $x, y \in \mathbb{Q}$ und $x < y$ existiert ein $z \in \mathbb{Q}$, sodass $x < z < y$.
Oder genauer: jeder Punkt in $\mathbb{Q}$ ist ein limit Punkt von $\mathbb{Q}$ mit der standart Topology.

10.2.1 Beweis

Wir schreiben x = $[(p_1, q_1)]$ und y = $[(p_2, q_2)]$, sodass $q_1, q_2 > 0$ und $p_1 \times q_2 < q_1 \times p_2$.
Nehmen wir nun eine neue Zahl z, mit $z = \frac{(x+y)}{2} = [(p_1 \times q_2 + q_1 \times p_2, 2 \times q_1 \times q_2)]$.
Da die Multiplikation kompatibel mit der totalordnung auf $\mathbb{Z}$ ist, folgt:

$$q_1 \times (p_1 \times q_2) < q_1 \times (q_1 \times p_2) \Rightarrow 2 \times q_1 \times q_2 \times p_1 < q_1 \times (p_1 \times q_2 + q_1 \times p_2) \Rightarrow x < z$$

$$(p_1 \times q_2) \times q_2) < (q_1 \times p_2) \times q_2 \Rightarrow (p_1 \times q_2 + q_1 \times p_2) \times q_2 < 2 \times q_1 \times q_2 \times p_2) \Rightarrow z < y$$

10.3 $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Es existiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$.
Genereller: Eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar, also es existiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$ mit $S_n = \{s_{np} | p \in \mathbb{N}\}$.

10.3.1 Beweis

Wir arrangieren und die Mengen ($S_n = \{s_{np} | p \in \mathbb{N}\}_{n\in\mathbb{N}}$) auf einer 2 Dimensoinalen Fläche und plazieren s_{np} an die Koordinaten (n,p). Wir listen nun alle Mengen S_n horizontal auf etc. Die Bijektion erzählt man nun durch **Cantors Diagonalargument**, also man "läuft" entlang der Achsen diagonal durch und zählt dann ab.

	1	2	3	4	5	6
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6

Es folgt nun, dass $\mathbb{Z} \subset \bigcup\limits_{a\in\mathbb{N}} \{(a,b) | b \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar und damit auch $\mathbb{Q} \subset \bigcup\limits_{p\in\mathbb{Z}} \{(p,q) | q \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\}$

11 Reele Zahlen

DIe nützlichsten Zahlen die wir verwenden werde, sind die Reelen Zahlen. Informell sitzen die Reelen Zahlen "zwischen" den Rationalen Zahlen. D.h. sie sind selbst nicht rational, können aber stark mit rationalen Zahlen approximiert werden. Das paradebeispiel für eine nicht rationale Zahl ist $\sqrt{2}$.
Die reelen Zahlen können wir mithilfe von Dedekindschen Schnitten konstruieren. Ein Dedekind Schnitt kann man sich als die reele Zahl b vorstellen, die durch die Menge $(-\infty, b) \cap \mathbb{Q}$.

11.1 Konstruktion

Die Reelen Zahlen können mithilfe von der Menge der Dedekinschen Schnitte über $\mathbb{Q}$ konstruiert werden. Dabei ist ein Dedekind Schnitt folgendes:
Ein Dedekindscher Schnitt (A,B) ist eine Partitionierung von $\mathbb{Q}$ in zwei nicht leere disjunkte Mengen. Also $\mathbb{Q} = A \cup B$, mit $A, B \neq \varnothing$ und $A \cap B = \varnothing$ mit den Eigenschaften:

- A ist abwärtstechnisch geschlossen: wenn also $x, y \in \mathbb{Q}$ mit x ¡ y und $y \in A$ dann ist auch $x \in A$
- A hat kein maximales Element: wenn $x \in A$ dann existiert ein $y \in A$ sodass x < y.

Da $B = \mathbb{Q} \backslash A$. können wir den Dedekindschen Schnitt durch seine erste Menge A identifizieren. Die Menge A ist nicht leer, nach unten abgeschlossenes echte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ (und deswegen nach oben beschränkt) und hat kein maximales Element.

$\mathbb{Q}$ ist in der Menge der Dedekinschen Schnitte enthalten, wenn man z.b. $r \to A = \{a \in \mathbb{Q} | a < r\}$, welches in $\mathbb{Q}$ kein maximales Elelemtn besitzt (weil $\mathbb{Q}$ dicht ist.)
Die Operationen und die totalordung der dedekinschen Schnitte ist wie folgt definiert:

- **addition** $A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 | a_1 \in A_1 \text{ und } a_2 \in A_2\}$
- **subtraction** $A_1 - A_2 = \{a_1 - b_2 | a_1 \in A_1 \text{ und } b_2 \in \mathbb{Q} \backslash A_2\}$
- **negation** $-A_2 = 0 - A_2 = \{a_1 - b_2 | a_1 \in \mathbb{Q}_{<0} \text{ und } b_2 \in \mathbb{Q} \backslash A_2\}$
- **total Ordnung** $A_1 < A_2$, wenn A_1 eine echte Teilmenge von A_2 ist. Also $A_1 \subsetneq A_2$
- **multiplikation**, es gibt zwei Fälle:
  - für $A_1, A_2 \geq 0$ definieren wir $A_1 \times A_2 = \{a_1 \times a_2 \mid 0 \leq a_1 \in A_1 \text{ und } 0 \leq a_2 \in A_2\} \cup \mathbb{Q}_{<0}$
  - ansonsten nutzen wir eine der folgenden Äquivalenzen: $A_1 \times A_2 = -(A_1 \times (-A_2)) = -((-A_1) \times A_2) = ((-A_1) \times (-A_2))$
- **division** wieder 2 Fälle:
  - wenn $A_1 \geq 0$ und $A_2 > 0$ dann $\frac{A_1}{A_2} = \{\frac{a_1}{a_2} | 0 \leq a_1 \in A_1 \text{und} b_2 \in \mathbb{Q} \backslash A_2\} \cup \mathbb{Q}_{<0}$
  - ansonsten nutzen wir einer der folgenden Äquivalenzen: $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{A_1}{(-A_2)} = -\frac{(-A_1)}{A_2} = \frac{(-A_1)}{(-A_2)}$.

Jede nichtleere Teilmenge der Reelen Zahlen, hat damit ein Supremum.

11.2 Jede beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$

Das Supremum, also die kleinste obere Schranke, einer beschränkten Menge $S = \{A|A \in X \text{ und } A < B\}$ von einer Totalgeordneten Menge X, ist ein Element $I \in X$ sodass gilt:

$$\forall A \in S, A \leq I \text{ und } \forall I' < I, \exists A \in S, A \nleq I'$$

(Erinnere, dass < über die echte Mengeninklusion definiert ist $\subset$)
Das Supremum der Menge der dedekindschen Schnitte $S = \{A|A \in \mathbb{R} \text{ und } A < B\}$ ist genau der dedekindsche Schnitt $I = \bigcup_{A \in S} A$.
(A ist $\in \mathbb{R}$, weil wir $\mathbb{R}$ als die Menge, aller Dedekinschen Schnitte definiert haben, und diese Schnitte eben Mengen sind. deswegen $A \in \mathbb{R}$ und wieder < bedeutet echtes$\subset$), dann ist intuitiv klar, wenn wir die Union aller Mengen in S bilden, dann wird aus vielen kleinen Mengen eine große Menge, die genau der Dedekindsche Schnitt ist, der S nach oben beschränkt(weil ja kein element dann größer sein kann)

11.2.1 Beweis

Sei $S = \{A|A \in \mathbb{R} \text{ und } A < B\}$, dann ist die Menge $I = \bigcup_{A \in S} A$, ein dedekindscher Schnitt, da:

- weil $A \subset \mathbb{Q}$ ist $I \subset \mathbb{Q}$, da $I \supset A \neq \emptyset$ folgt: $I \neq \emptyset$, weiter da $I < B$ folgt $I \neq \mathbb{Q}$
- I ist abwärts geschlossen, denn wenn $y \in I$ ist $y \in A$ für irgendein A, da A nach unten abgeschlossen ist. $x < y \Rightarrow x \in A \subset I$
- wenn I ein maximales Element x hätte, so auch irgend ein A mit $x \in A$, da $A \subset I$, dann wäre x das maximale Element von A, was nicht möglich ist.

Weiter ist I eine obere Schranke von S, weil $\forall A \in S, A \subset I$, also $A \leq I$. Und jedes $I' < I$, ist keine obere Schranken von S, weil wenn $I' < I$, dann $\exists x \in I \backslash I'$. Da $x \in I, \exists A \in S$, sodass $x \in A$, also $Ac \nleq I'$. (Weil ja $x \notin I'$)

11.3 Körper

Ein algebraischer Körper $(K, +, 0, \times, 1)$ ist eine Menge, sodass:

- $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.
- $(K \backslash \{0\}, \times, 1)$ ist auch eine abelsche Gruppe.
- Es gilt Distributivität: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Wenn sogar K eine totalgeordnete Menge mit $\leq$ ist, dann ist $\leq$ kompatibel mit dem + und $\times$, wenn gilt:

$$\forall x, y, z \in K, \text{ wenn } x \leq y, \text{ dann auch } x + z \leq y + z$$
$$\text{wenn } 0 \leq \text{ dann } 0 \leq x \times y$$

Weiter noch, ist $\leq$ dedekind komplett wenn jede nach oben beschränkte nicht-leere Teilmenge von K, ein Supremum hat. Also wenn gilt:

$$\forall X \subset K, X \neq \emptyset, \text{ wenn } B = \{b \in K | \forall x \in X, x \leq b\} \neq \emptyset \text{ dann } \exists u \in B, \text{ sodass } \forall b \in B, u \leq b$$

11.3.1 Beispiel

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind ein algebraischer Körper, der verträglich mit der Ordnung $\leq$ ist, aber nicht dedekind komplett. Zum Veranschaulichen:
Nehme die Menge $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$, A hat in $\mathbb{Q}$, zwar obere Schranken, aber keine kleineste Obere Schranke (Subremum), da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

11.4 Axiomatiche Definition von $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, 0, \times, 1)$ ist der einzige dedekind komplette, totalgeordnete Körper.

11.5 $\mathbb{R}$, Archimedisches Axiom

Die Reelen Zahlen $\mathbb{R}$ besitzen das Archimedische Axiom. Also:

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < x < y \ \exists n \in \mathbb{N}, y < nx$$

11.5.1 Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen y = 1. Nehmn nun an, dass $0 < x < 1$, sodass $nx \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Sei nun S die Menge aller solcher x (also: $S = \{x \in (0, 1) | nx \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}\}$)und bemerke, dass S nach oben beschränk ist durch die 1. Also hat S ein Supremum, welches wir c nennen.
Weil c das Supremum von S ist $\Rightarrow n(\frac{c}{2}) \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ (Weil es ein $x \in S$ gibt mit $\frac{c}{2} < x \leq c$ und weil die ordnung Komplett ist $n(\frac{c}{2}) < nx \leq 1$). Allerdings existiert ein $p \in \mathbb{N}$ sodass $1 < p(2c)$, was aber nach vorraussetzung noch möglich ist. (c ist Supremum von S und S ist durch 1 nach Oben beschränkt).

Wir nehmen also an, es existieren x'se im Intervall 0 bis 1, sodass wir diese xse mit jeder natürlichen Zahl multiplizieren dürfen, ohne dabei größer als 1 zu werden. Mit dieser Annahme bilden wir nun die Menge S, die alle diese x'se enthält. Die Menge S ist dadruch nach oben beschränkt. also es kann kein Element in S geben, welches größer als 1 ist, da die x'se ja aus dem Intervall (0,1)kommen. Wir haben schon gezeigt, dass jede nach oben beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum hat. Das Supremum der Menge S nennen wir nun c. Da c das Supremum von S ist, liegt $\frac{c}{2}$ aufjedenfall auch in S und für die Elemente in S gilt ja, dass diese nach multiplikation mit irgendeiner natürlichen Zahl immernoch kleiner als 1 sind. Da $\frac{c}{2}$ echt kleiner als c ist, können wir auch schlussfolgern, dass es ein $x_0 \in S$ geben muss, welches größer als $\frac{c}{2}$ ist. Für x_0 muss jetzt auch gelten: $nx_0 < 1$. Bzw: $\frac{c}{2} \leq nx_0$ nun beide Seiten mit 2 Multiplizieren $\Rightarrow c \leq 2nx_0$, da c aber das Supremum von S ist, kann x_0 nicht größer als c sein. Dieser Widerspruch beweißt die Archimdes Property

11.6 $\mathbb{Q}$ ist Dicht in $\mathbb{R}$

$$x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y \ \exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y$$

11.6.1 Beweis

Take the fisrt wort of every Song currently in your Playlist, print all of them on paper and cut the individual words free. Then throw it in the air and the proof will appear as the paper falls on the ground.

11.7 $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Es existiert keine Surjektion $f : \mathbb{N} \to (0,1) \subset \mathbb{R}$, also ist $\mathbb{R}$ nicht abzählbar.

11.7.1 Beweis:

Write an Essay about Guraus skill to teach students, at the end of your essay the proof will appear.

11.7.2 Kardinalität von $\mathbb{R}$

Man kann zeigen, dass $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Also ist die Kardinalität der Reelen Zahlen gleich der, der Potenzmenge der Natürlichen Zahlen.

$$|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$$

Die "Continuum Hypothesis" beagt, dass es keine andere Kardinalzahl zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ gibt. Das heißt also:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

12 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Die Letzte Klasse an Zahlen, die wir uns anschauen werden die Komplexen Zahlen sein.

12.1 Konstruktion

Die Komplexen Zahlen ergeben sich aus dem Kartesichen Produkt der Reelen Zahlen: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Operationen:

- **Addition:** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- **Multiplikation:** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \times x_2 - y_1 \times y_2, x_1 \times y_2 + y_1 \times x_2)$

Die Komplexen Zahlen bilden einen Algebraischen Körper. Die Reelen Zahlen sind in die Komplexen Zahlen eingebettet mit $x \mapsto (x, 0)$.

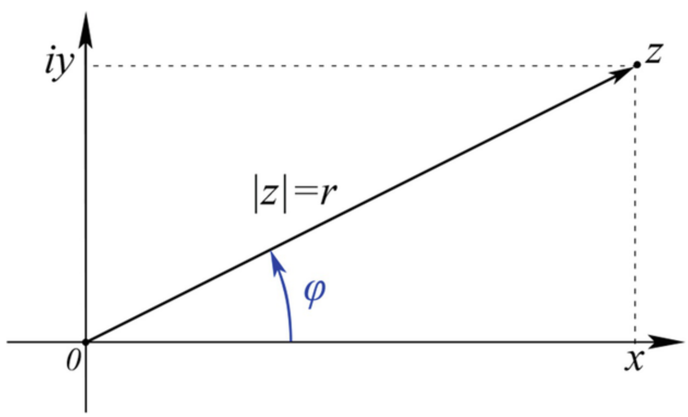
Weil $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ können die Komplexen Zahlen als Unedliche Fläche dargestellt werden. Dabei ist die "X-Achse", dann quasi die Reelen Zahlen, da $x \mapsto (x, 0)$ so ja die Reelen Zahlen eingebettet sind. Genauer (1,0) = 1 und v.a. (0,1) = i, also können wir jede Komplexe Zahl schreiben als:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0) = x + iy, \text{ mit } i^2 = -1$$

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl, dann nenne wir x den Realteil (Re(z)) und y den imaginärteil (Im(z)) von z.
Das komplex konjugierte von z, notieren wir $\overline{z}$ und wird gebildet, indem wir den Realteil gleich lassen, aber das additive inverse des Imaginärteil nehmen.

$$z = x + iy \to \overline{z} = x - iy$$

Die Komplexen Zahlen können wir uns als Punkte auf der Komplexen Ebene vorstellen.



Der absolutwert von z (auch modulus genannt) ist die nicht negative reele Zahl mit

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}, |z| \geq 0$$

Dabei repräsentiert $|z|$ den Abstand zur 0 = (0,0).
Das Argument einer komplexen Zahl ist der Winkel φ zwischen der "X-Achse", also der Reelen Achse und der Strecke $\overline{(0,0)(x,y)}$. Weiter gilt:

$$x = |z|cos(\varphi)\ , y = |z|sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad z = |z|(cos(\varphi) + isin(\varphi))$$

Der Winkel φ lebt im Intervall $(-\pi, \pi)$, notiert mit Arg(z).
Da das Argument, aber nicht eindeutig definiert ist, weil es eine Periodische Funktion ist, gilt:

$$z = |z|(cos(\theta) + isin(\theta)), \quad \theta = Arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ein paar wichtige Funktionen:

- **Inverses:** Additives Inverses von z ist -z. Das multiplikative Inverse von z ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}$
- **n-te Wurzel:** Für jedes $z = |z|(cos(\varphi) + isin(\varphi)) \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_{\neq 0}$ haben wir n verschiedene Nullstellen für n Potenz:

$$\xi^n = z \quad \xi \in \{\xi_0, ...\xi_{n-1}\}, \quad \xi_k = |z|^{\frac{1}{n}}(cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + isin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})), \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Die interessanteste Eigenschaft der Komplexen Zahlen ist das sie ein abgeschlossener Körper sind. Das heißt jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt Nullstellen in $\mathbb{C}$. (Fundamentalsatz der Algebra i guess).

13 Topologie

13.1 Definition Topologie

Eine Topologischer Raum ist eine Menge X eingepflegt mit der Struktur einer Topologie $\mathcal{T}$.
Dabei ist eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X eine Menge an Teilmengen von X, also $\mathcal{T} = \{U | U \subset X\} \subset P(X)$.
Diese Teilmenge mus folgende Eigenschaften erfüllen, dass es eine Topologie wird:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ *Also die leere Menge und die Ganze Menge X, müssen immer Teil der Teilmenge $\mathcal{T}$ sein, damit $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Wenn nicht beide drin sind, ist $\mathcal{T}$ definitiv keine Topologie.*

- **abgeschlossen unter beliebiger Union** Für jede Indexmenge A gilt:

$$\text{wenn } (U_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathcal{T} \text{ dann auch } \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$$

  *Also wenn ich beliebige Mengen in meiner Topologie nehme und diese Vereinige (Union), dann bleibe ich in meiner Topologie, und bekomme nach der Union **keine** Menge, die nicht schon in meiner Topologie chillt.*

- **abgeschlossen unter endlichem Schnitt** Für jede **endliche** Indexmenge I gilt:

$$\text{wenn } (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \text{ dann auch } \bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

  prinzipiell das gleiche wie bei der Union, nur machen wir hier die Einschränkung, dass wir nur endliche viele Teilmengen unseres $\mathcal{T}$ schneiden dürfen.

Eine Teilmenge Y von X hat die Struktur einer Teilmengentopologie, oder induzierten Topologie:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$$

Alle Topologien auf einer gegebenen Menge X bilden zusammen ein Poset bzw. sogar ein Lattice mit der Inklusionsrelation.

Erinnere: ein Poset ist einfach nur eine teilgeordnete Menge, und zu einem lattice wird es dann, wenn jedes paar an Elementen aus einem Poset, ein infimum und supremim hat. Dieses Meet and Join auf dem Übungszettel.

Seien nun $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X und gilt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, dann sagen wir $\mathcal{T}_2$ feiner ist als $\mathcal{T}_1$ (und natürlich: $\mathcal{T}_1$ ist gröber als $\mathcal{T}_2$)

Auf jeder Menge X gibt es zwei triviale Topoligien:

- **diskrete Topologie** Ist die feinste Topologie also einfach nur $\mathcal{T} = P(X)$
- **indiskrete Topologie** Die gröbste Topologie also nur: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

13.1.1 Beispiel

Zur Menge $X_b = \{a, b, c, d, e, f\}$ Ist $\mathcal{T}_b$ eine Toplogie mit:

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{c, d\}\{a, c, d\}\{b, c, d, e, f, \}\}$$

13.2 Offene Mengen, Umgebung

13.2.1 Offene und geschlossene Mengen

Die Elemente U einer Topologie $\mathcal{T}$ nennen wir offene Mengen. U wird ab sofort unsere Notation für offenen Mengen sein.

Eine geschlossene Menge ist eine Menge, deren Komplement offen ist.
Mengen, die geschlossen und offen sind (z.b. $\varnothing, X$) nennen wir clopen. (closed and open)-

13.2.2 Beispiel

Nehmen wir wieder das Beispiel unserer Menge X_b und $\mathcal{T}_b$.
Dann ist z.b. $\{a, c, d\}$ eine offene Menge. Die Menge $A = \{a, b, c\}$, hat das Komplement $\{a, b, c\}^c = \{d, e, f\} = S$, da $S \notin \mathcal{T}_b$ ist die Menge A nicht geschlossen. Aber die Menge $B = \{a, b, e, f\}$ hat das Komplement $\{a, b, e, f\}^c = \{c, d\} = D$, da $D \in \mathcal{T}_b$ gilt, dass die Menge B geschlossen ist.

13.2.3 Umgebung

Die Umgebung eines Elements ("Punkt") in X, $x \in X$, ist eine Teilmenge V der ganzen Menge X, $V \subset X$, welche eine offene Menge enthält, die wiederrum x enthält.

$$x \in U \subset V \quad \text{mit } U \in \mathcal{T}$$

O.b.d.a, können wir uns auf offene Umgebungen einschränken, dann ist jede Offene Menge, die den "Punkt" x enthält eine Umgebung von x.

13.2.4 Beispiel

Schauen wir uns den "Punkt" **a** in unserer Menge X_b an mit der Topologie $\mathcal{T}_b$.

Dann ist die Menge $V_1 = \{a, c, d\}$ eine Umgebung von a. Weil V_1 eine offene Menge ist bezüglich unserer Topologie $\mathcal{T}_b$

Weiter ist $V_2 = \{a, b, c, d\}$ eine Umgebung von a. V_2 ist zwar selbst keine offene Menge, aber enthält eine offene Menge, die a enthält. $\{a, c, d\} \subset \{a, b, c, d\}$.

13.3 Hausdorff Topologien

Wir nennen eine Topologie Hausdorff, wenn es für zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, zwei disjunkte Umgebungen gibt, eine mit x_1 und eine mit x_2. Also:

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y\ \exists V_1 \text{ mit } x_1 \in V_1 \text{ und } V_2 \text{ mit } y \in V_2 \text{ sodass } V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Dabei sind V_1, V_2 Umgebungen der Punkte x_1 und x_2.
In einer Hausdorff Topologie sind die Punkte nicht ununterscheidbar "nach" beieinander.

13.3.1 Beispiel:

Die diskrete Topologie ist z.B Hausdorff. Da jede Teilmenge von X offen ist. Also Teil der Topologie. *Erinnere diskrete Topologie ist $\mathcal{T} = P(X)$* D.h. wir können uns immer ein Element nehmen, und dessen Punktmenge z.B. a und $\{a\}$, dann ist $\{a\}$ diejenige Umgebung von a, die disjukt von allen anderen Punktmengen ist.

Die indisktere Topologie (*Also* $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$), ist dahingegen niemals Hausdorff, weil es nicht für jede Punkte diskunte Umgebungen gibt. (Da die einzigen Offenen Mengen X selbst und die leere Menge ist) Also ist die einzige Umgebung die wir für ein $x_1 \in X$ finden können X selbst, und damit kann diese Topologie nicht Hausdorff sein, weil in X ja alle Elemente liegen.

13.4 Subbasis einer Topologie

Eine Supbasis einer Topologie ist eine Teilmenge an offenen Mengen $U \in \mathcal{T}$, sodass jede andere offene Menge durch beliebige Vereinigung endlichen Schnitte der Elemente in der Supbasis erhalten werden können.

Eine Basis der Topologie ist eine Teilmenge an offenen Mengen, sodass die beliebige Vereinigung dieser Elemente ausreicht, um jede andere offene Menge zu erhalten.

Eine Basis einer Topologie bestimmt die zugehörige Topologie eindeutig. Also die Basis selbst ist nicht eindeutig (es kann verschiedenen Basen zu einer Topologie geben). Aber wenn ich eine Basis habe, darf diese nur eine Topologie erzeugen. Sprich ist $\mathcal{B}$ eine Basis sowohl von $\mathcal{T}_1$ als auch von $\mathcal{T}_2$ so ist $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Jede topologiesche Basis ist zeitgleich auch eine Subbasis.
Unterschied zur Basis eines VRs
In Kontrast zur Basis eines Vektorraums fordern wir bei einer Topologischen Basis nicht die Minimalität! Und es gibt für manche Topologien keine Basis.

13.4.1 Order Topologie

Definition

In jeder totalgeordnete Menge X können wir die Order Topologie einbringen.

Diese wird generiert durch die Subbasis $\{x|x < a\}$ und $\{x|b < x\}$ für alle $a, b \in X$
Eine Basis ist gegeben durch beide diese Mengen zusammen: $(a, b) = \{x|a < x < b\}$

Die Topologie, also die Teilmenge, die das ganze jetzt generiert, ist genau die Menge, aller "Intervalle" einer totalgeordneten Menge X. Intervalle sind hier gemeint wie in der Schule, also (0,5) ist das ***offene*** *Intervall von 0 bis 5, welches die 0 und die 5 nicht enthält.*

Erinnere: die Basis der Topologie ist $\{x|a < x < b\}$, also kleiner als, deswegen ist die 0 und die 5 nicht enthalten.

Wenn es interessiert:

Wenn man die Basis der Topologie so umdefiniert, dass ((a, b) = $\{x \mid a \leq x \leq b\}$), dann ändern wir die übliche Definition eines offenen Intervalls zu der eines abgeschlossenen Intervalls. In der Standard-Order-Topologie sind offene Intervalle ((a, b)) Mengen, die alle Punkte zwischen (a) und (b) enthalten, ohne die Endpunkte selbst.

Wenn wir jedoch die Basisintervalle als abgeschlossene Intervalle definieren, dann würden diese Intervalle die Endpunkte (a) und (b) einschließen. In diesem Fall wäre jedes unserer "Basisintervalle" tatsächlich ein abgeschlossenes Intervall im herkömmlichen Sinne, und die von dieser Basis erzeugte Topologie würde als ***abgeschlossene Intervalltopologie*** *bezeichnet werden.*

In einer solchen Topologie wären die "offenen" Mengen, die durch Vereinigung der Basisintervalle gebildet werden, in Wirklichkeit Mengen, die in der üblichen mathematischen Terminologie als abgeschlossen gelten. Dies würde zu einer anderen Topologie führen, die sich von der Standard-Order-Topologie unterscheidet. Es ist wichtig zu beachten, dass die Begriffe "offen" und "geschlossen" in der Topologie relativ zu der gewählten Definition der Basisintervalle sind. Wenn wir also die Definition ändern, ändern sich auch die Eigenschaften der resultierenden Topologie.

Beispiel:

Die Ordnungszahlen sind totalgeordnet, also können wir den "Raum" der Ordnungszahlen mit der Ordertopologie versehen. (Also wieder nur Intervalle einführen).

Nehmen wir an, (X) ist die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) mit der üblichen Ordnung. Die Basisintervalle wären dann Intervalle der Form ((a, b)), wobei (a) und (b) reelle Zahlen sind und (a < b). Jede offene Menge in der Order Topologie von ($\mathbb{R}$) kann als eine Vereinigung solcher offenen Intervalle dargestellt werden.

Ein konkretes Beispiel für eine offene Menge in dieser Topologie wäre das Intervall ((1, 3)), das alle reellen Zahlen zwischen 1 und 3 enthält, aber nicht die Zahlen 1 und 3 selbst. Dieses Intervall ist offen in der Order Topologie, weil es direkt als ein Basisintervall definiert ist.

13.4.2 Beispiel Basis

In der diskreten Topologie, also P(X), bildet die Menge, aller Punktmengen eine Basis, dieser Topologie.

13.5 Stetige und offene Funktionen

Eine Funktion $f : X \to Y$, die von einem Topologischen Raum $(X, \mathcal{T}_1)$ in einen anderen Topologischen Raum$(Y, \mathcal{T}_2)$ abbildet heißt:

- **offen**, wenn $\forall U \in \mathcal{T}_1,$ gilt $f(U) \in \mathcal{T}_2$

  Also die Bilder der offenen Mengen in X, wieder offene Mengen in Y sind.

- **stetig**, wenn $\forall W \in \mathcal{T}_2$ gilt $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_1$

Es gibt eine Folgerung, dass eine Funktion $f : X \to Y$ stetig ist, wenn für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung N von $f(x) \in Y$ gilt, dass die Menge $f^{-1}(N)$ eine Umgebung von $x \in X$ ist.

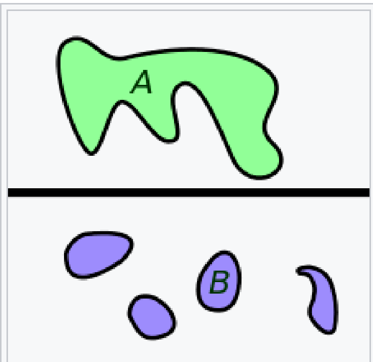
Wenn $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ beides Topologien auf der Menge X sind und gilt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, dann ist die Identische Abbildung $id_x : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ eine offene FUnktion.
Hingegen ist die $id_x : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ eine stetige Funktion.
Schaue hierzu genau die Definitinnen von offen und stetig an, und beachte dann, dass $\mathcal{T}_1$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}_2$ ist.

13.5.1 Zusammenhängende Räume

Ein Topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn man ihn nicht durch die Union zweier **offener** disjunkter nichtleerer Mengen darstellen kann.

Also X ist zusammenhängend, wenn:

$$X \neq X_1 \cup X_2 \text{ mit } X_1 \cap X_2 = \emptyset \text{ und } X_1, X_2 \in \mathcal{T}$$

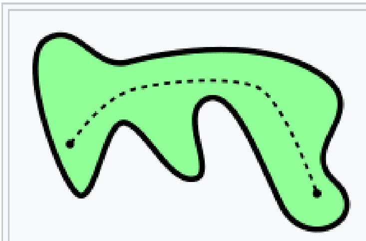


Zusammenhängende und nicht zusammenhängende Unterräume von $\mathbb{R}^2$: *A* ist einfach zusammenhängend, *B* (das gesamte Blaue) ist unzusammenhängend. Die Komplemente von *A* und *B* sind zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Wegzusammenhang

Für $x, y \in X$ ist der "Pfad" von x zu y eine stetige Funktion $f : [0,1] \to X$ mit f(0) = x und f(1) = y. Ein Topologischer Raum heißt dann Wegzusammenhängend, wenn es für jedes paar an x und y, diesen Pfad gibt.

Wegzusammenhängende Räume sind immer zusammenhängend. Etwas überraschend ist auf den ersten Blick jedoch vielleicht, dass es Räume gibt, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.



Dieser Unterraum von R^2 ist wegzusammenhängend, da je zwei seiner Punkte durch einen Weg verbunden sind.

13.6 Kompakte Mengen

13.6.1 Überdeckung (Cover)

Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckeung oder Cover von $B \subset X$, wenn:

$$B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

Dabei kann es unendliche Überdeckungen oder endliche Überdeckungen geben, abhängig davon, ob die Indexmenge I endlich ist oder nicht.

13.6.2 Kompakte Menge

Eine Menge $K \subset X$ heißt kompakt, wenn man von jeder offenen Überdeckung von K, also:

$$K \subset \bigcup_{a \in A} U_a \text{ mit } U_a \in \mathcal{T}$$

eine endliche Überdeckung herauspicken kann. Also:

$$K \subset \bigcup_{a \in I \subset A} U_a \text{ mit } U_a \in \mathcal{T} \text{ und } I \text{ endlich.}$$

13.6.3 Eigenschaften kompakter Mengen

- Sei K eine kompakte Teilmenge von X und U eine Teilmenge von K $U \subset K$ mit $U \in \mathcal{T}$, dann ist $K \backslash U$ eine kompakte Menge.

- Wenn K eine kompakte Teilmenge von $(X, \mathcal{T})$ ist, dann ist K auch kompakt in der Induzierten Topologie $(K, \mathcal{T}_K)$.

  Diese Induzierte Topologie ist eine Teilraumtopologie, oder auch Unterraumtopologie. Das kann man sich auch so ähnlich vorstellen, Teilmenge, die die Sturktur(hier Topolgie) erbt.

  Formal:

  Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum mit $Y \subseteq X$, dann ist die Teilraumtopologie auf Y gegeben durch:

  $$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

  Die offenen Teilmengen von Y sind also genau die Schnitte der offenen Teilmengen U von X mit Y.

- Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion ist wieder eine kompakte Menge.

13.7 Topologischer Rand

Betrachten wir eine Teilmenge Y eines Topologischen Raumens $(X, \mathcal{T})$. $Y \subset X$. Für jeden Punkt $x \in X$ schreiben wir nun $U(x)$, als eine offene Umgebung von x, also $U(x)$ ist eine offene Menge, die x enthält. $U(x) \in \mathcal{T}$ mit $x \in U(x)$.
Dann ist der Punkt x...

- ein limit/häufungs Punkt von Y, wenn jede Umgebung von x mindestens einen Punkt in Y enthält:

  $$\forall U(x),\ (U(x) \cap Y) \backslash \{x\} \neq \varnothing$$

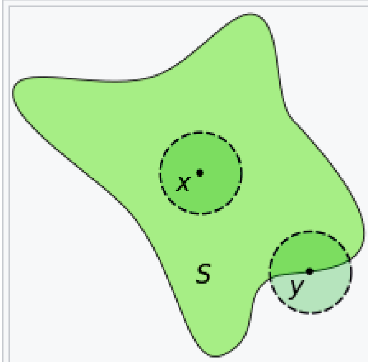
  Ein Limit Punkt muss nicht zwingend in Y liegen.

- ein innerer Punkt von Y , der eine Umgebung komplett in Y hat.

  $$\exists U(x) \subset Y$$

- ein isolierter Punkt von Y, wenn x zu Y gehört und kein Limit Punkt von Y ist.

  $$x \in Y, \quad \exists U(x),\ s.d.\ (U(x) \cap Y) \backslash \{x\} = \varnothing$$

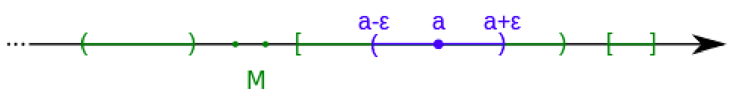


x ist innerer Punkt von S, y ist Randpunkt.

13.7.1 Beispiel:

Nehme die folgende Menge und die Zahl a:

a ist ein innerer Punkt von M, da es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ eine Teilmegen von M ist:



13.7.2 Weitere Eigenschaften

Weiternoch halten wir fest, dass isolierte Punkte einer Menge per Definition keine limit Puntke sind, aber innere Punkte sein können.
Sei die Menge X mit der diskreten Topologie "ausgestattet" und $Y \subset X$, dann ist jeder Punkt $y \in Y$ ein isolierter Punkt, als auch ein innerer Punkt von Y, weil ja $\{y\}$ offen ist. *(Weil Diskrete Topologie: $\mathcal{T} = P(X)$).*

Hier fehlen jetzt noch die Definitionen vom Rand und Inneren etc., diese sind aber schon auf deutsch auf dem Übungszettel zu finden.

14 Metrische Räume

In vielen Fällen folgt die Topologie eines Raumes aus einer Metrik. Ein topologischer Raum heißt metrizierbar, wenn er homöomorph zu einer Metrischen Raum ist. Ein Metrischer Raum ist ein Raum, indem wir Distanzen zwischen Punkten messen können.
Im folgenden gilt immer: $\epsilon > 0$, also eine strikt postivie reele Zahl, die beliebig klein ist.

14.0.1 Homöomorphismen

Homöomorphismen sind Abbildungen zwischen zwei Topologischen Räumen $f : X \to Y$, für die folgendes gilt:

- f ist bijektiv
- f ist stetig
- f^{-1} ist auch stetig.

14.1 Metrischer Raum

Ein Metrischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Distanzfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass:

- $d(x, x) = 0$
- **symmetrsch und positiv:** wenn $x \neq y$, dann gilt: $d(x, y) = d(y, x) > 0$
- **Dreiecksungleichung**: $\forall x, y, z \in X$ gilt: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

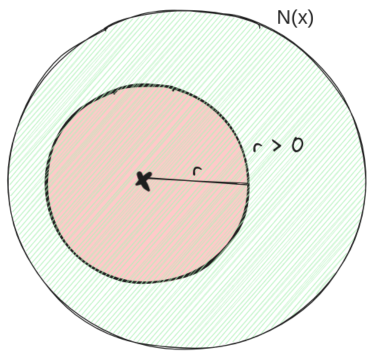
Aus der Dreiecksungleichung erkennt man, dass die Distanzfunktion immer den "direkten" Abstand, also den kürzesten Weg misst.
Eine Distanzfunktion in dem Metrischen Raum induziert eine Topologie.

14.2 Die standart Topologie

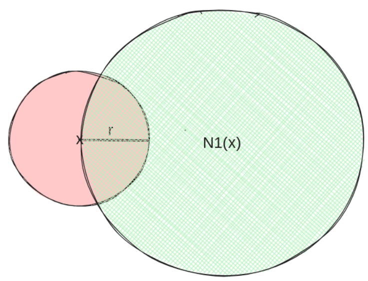
Die standart Topologie auf einem Metrischen Raum (X, d) ist eine Topologie, die von der Subbasis erzeugt wird von allen offenen Bällen $B_r(x)$ mit

$$B_r(x) = \{y \mid d(x, y) < r\} \subset X, \quad \forall x \in X, \ r \in \mathbb{R}_{>0}$$

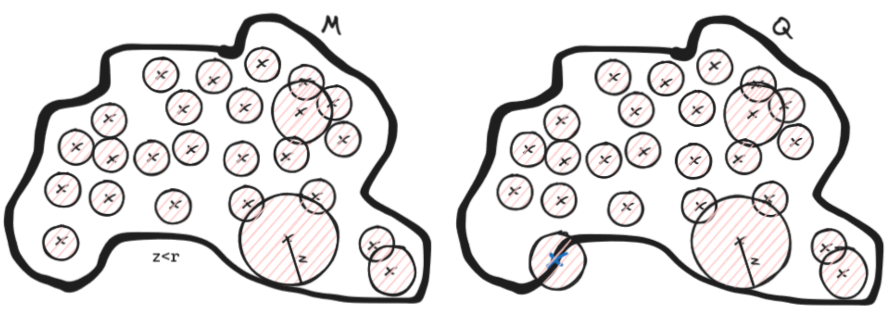
Erinnere: Subbasis heißt, wir bilden jede beliebige Kombination an Mengenvereinigungen von endlichen Mengenschnitten.
Hier haben wir jetzt die Menge an allen offenen Bällen, wobei ein offener Ball die Menge aller "Punkte(Elemente)" ist, die im Bereich eines Radius r, um ein gegebenen beliebig aber festen Punkt sind.
Das ganze ist ein offener Ball, weil wir die distanz strikt kleiner als r definiert haben. $d(xy) < r$ und nicht $\leq$.
Weiternoch ist es wichtig sich das ganze mal vorzustellen, für jedes positive r, welches wir wählen können ist die Menge N(x) eine Umgebung von x, wenn N(x) einen offenen Ball von x enthält:



Die Menge N1(x) hier ist keine Umgebung von x, da wir keinen offenen Ball von x finden. egal wie klein wir r wählen, sodadd N1(x) diesen Ball komplett enthält:



Eine offene Menge in der Standart Topologie ist eine Menge, die zu allen seinen Punkten eine Umgebung ist.



Hier ist M eine offene Menge, da wir zu jedem Punkt in M (die kleinen schwarzen x'se sind die Elemente in M) einen Ball finden, können. Also ist M eine Umgebung von jedem seiner Punkte und damit eine offene Menge. Bzw. in anderen Worten:
Mann kann M erzeugen durch die (sub)-Basis, aller offenen Bälle von den Elementen.

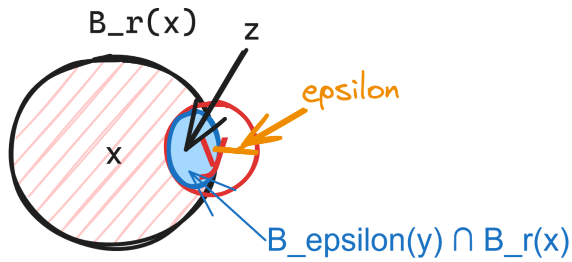
Q hingegen ist keine offene Menge, da das blaue x zwar in Q liegt, aber wir keinen Ball von dem blauen x in Q finden können. Also ist Q ***nicht*** *von* ***jedem*** *Punkt eine Umgebung und damit keine offenen Menge.*

Es gilt wieder: Nicht jede nicht-offene Menge ist geschlossen. Nur die komplemente der offenen Mengen sind geschlossen. Der Abschluss eines Balls in der standart Topologie ist definiert als:

$$\widehat{B_r}(x) = \{y \mid d(x,y) \leq r\}$$

Wenn y ein Häufungspunkt von $B_r(x)$ ist, dann gilt:

$$\forall \epsilon, \exists z \in (B_\epsilon(y) \cap B_r(x)$$



Hierraus folgt, dass $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + \epsilon$.
Weiternoch ist der Rand eines Balles dann:

$$\partial B_r(x) = \{y \mid d(x,y) = r\}$$

14.3 first countable spaces

Ein Topologischer Raum heißt "first countable", wenn jedes $x \in X$ eine abzähbare Menge an offenen Umgebungenvon x gibt $\{U_n(x) \mid nin\mathbb{N}\}$, sodass für jede offene Menge U, die x enthält. $x \in U$ folgt, dass $U_i(x) \subset U(x)$ ist, für irgendein $i \in \mathbb{N}$.

Jede standart Topologie ist first countable!

14.3.1 Wikiperdia definition:

In topology, a branch of mathematics, a first-countable space is a topological space satisfying the "first axiom of countability". Specifically, a space X is said to be first-countable if each point has a countable neighbourhood basis (local base). That is, for each point x in X there exists a sequence $N_1, N_2, \ldots$ of neighbourhoods of x such that for any neighbourhood N of x there exists an integer i with N_i contained in N. Since every neighborhood of any point contains an open neighborhood of that point, the neighbourhood basis can be chosen without loss of generality to consist of open neighborhoods. Aus diesem Lemma folgt auch, dass die offenen Bälle sogar eine Basis bilden und

nicht nur eine Subbasis.

14.4 Hausdorffness der Standart Topologie

Die standart Topologie eines Metrischen Raumes ist Hausdorff.

Es sind sogar alle metrisierbaren Topologien Hausdorff.

14.4.1 Beweis

Go up to a stranger ans say something nice about them. If they answer with "ueehh", you won the proof.

14.5 Nicht metrisierbare Topologien

Ein Beispiel für eine nicht metrisierbare Topologie ist die **Sorgenfrey Topologie** auf $\mathbb{R}$ erzeugt durch die Basis von allen halb offenen Intervallen $[a, b)$.

14.6 Der $\mathbb{R}^D$ metrische Raum

Ein D -dimensionaler Eukliedirscher Raum ist die Menge $\mathbb{R}^D = \{(x_1, ..., x_D) \mid x^\mu \in \mathbb{R}\}$. Dabei ist $0 = (0, ..., 0)$ der Ursprung in $\mathbb{R}^D$, also der Punkt mit den Koordinaten $x_\mu = 0,\ \mu = 1, ..., D$. In den meisten Fällen spricht man von $\mathbb{R}^D$, als den Topologischen Raum mit der standart Topologie bezüglich einer distanz Funktion. In folgenden wird $\mathbb{R}^D$ immer mit dieser Topologie gemeint sein. *Lasset uns nicht von diesem Euklidischen Raum ablenken, das schreiben wir nur dazu, um uns von anderen komplizierteren Räumen, die später noch kommen werden, abzugrenzen. Ein euklidischer Vektroraum ist ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ zusammen mit einem "inner product", wobei das "inner product" von zwei Vektoren ein Skalar ist. (BSP. Skalarprodukt)*

Ein euklidischer Raum ist ein affiner Raum über den reelen Zahlen, sodass er mit einem euklidischern Vektorraum assozieiert werden kann.

14.6.1 Distanzfunktionen

Der $\mathbb{R}^D$ ist ein metrischer Raum. Es gibt allerdings ein paar standart distanzfunktionen, Z.B.

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{\mu=1}^{D} \mid x_\mu - y_\mu \mid^p \right)^{1/p} , \quad p \in [1, \infty)$$

für $p = \infty$ gilt:

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = max_{\mu=1,...,D}\ |x_\mu - y_\mu|$$

Beachte, im Gurau skript steht überall x^μ, das habe ich abgeändert zu x_μ, weil er hier den Indez meint und ***keine*** *Potenz. Ich halte es für besser den Index unten zu lassen, damit wir das nicht mit den Potenzen verwechseln*

Weiter noch beobachtet man, dass für $D = 1$ gilt, dass unabhängig von dem p, alle Distanzfunktionen gleich sind und den absoluten Wert der differenz ergeben *Wenn man sich $\mathbb{R}$ als Zahlengerade vorstellt ist das ja auch ziemlich sinnvoll, dass die Distanz nur von der Differenz der beiden Punkte abhängt.*

14.6.2 Beispiele:

Betrachten wir eine Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$

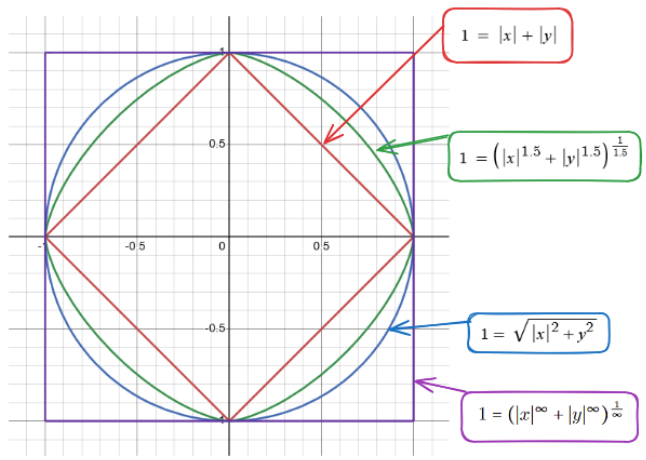
$$p = 1 \;\Rightarrow\; \|x - y\|_1 = \left(\sum_{\mu=1}^{2} |x_\mu - y_\mu| \right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$p = 2 \;\Rightarrow\; \|x - y\|_2 = \left(\sum_{\mu=1}^{2} |x_\mu - y_\mu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$$

$$p = 3 \;\Rightarrow\; \|x - y\|_3 = \left(\sum_{\mu=1}^{2} |x_\mu - y_\mu|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{|x_1 - y_1|^3 + |x_2 - y_2|^3}$$

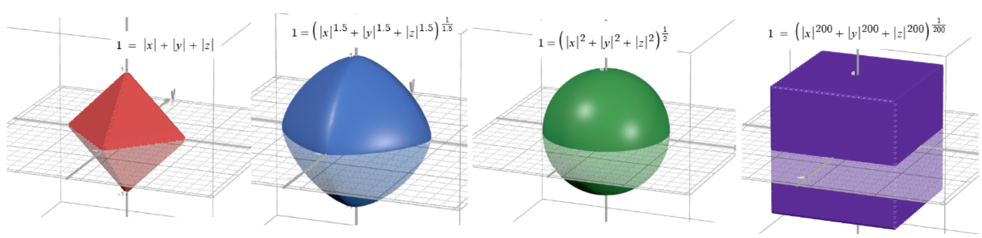
etc.

Wir betrachten nun den Einheitsball. Ein Einheitsball ist der Ball um den Ursprung mit dem Radius $r = 1$. Nachwievor sind wir im $\mathbb{R}^2$ und betrachten mehrere p-Abstandsfunktionen.



Wie man erkennen kann, starten wir bei p=1 und wandern, wenn wir mit p näher an die 2 kommen, hinzum Einheitskreis. Je weiter wir von der 2 zur Unendlichkeit gehen, desto kastiger wird der Ball. Vergleiche hierzu einfach mal die Graphen von x^2, x^4, x^{18}, x^n für ein größer werdendes n. Merkste selba wa.

Und weil ich Bock drauf hab, das ganze nochmal im $\mathbb{R}^3$.



The ball is actually a square.

14.6.3 Äquivalenz der Distanzfunktionen?

Die Distanzfunktionen d_p sind auf $\mathbb{R}^D$ kompatibel. Gemeint ist aufjedenfall, dass es für beliebige $p, q \geq 1$, zwei Konstanten a und b gibt, sodass:

$$a \cdot d_p(x,y) \leq d_q(x,y) \leq b \cdot d_p(x,y)$$

Dieses Lemma impliziert, dass die standart Topologie auf einem D-dimensionalen euklidischen Raum $(\mathbb{R}^D, d_p)$ unabhängig von der der gewählten d_p-distanzfunktion ist (also p-unabhängig).

Eine Menge ist offen bezüglich einer Distanzfunktion aus d_p genau dann wenn sie offen bezüglich jeder Distantzfunktion aus d_p ist.
Aus Einfachheit nutzen wir oft einfach $p = 2$. Wenn bei $\| \cdot \|$ kein p dabeisteht, so kann man von $p = 2$ ausgehen.

14.6.4 In der standart Topologie $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

In der Standart Topologie der Abschluss von $\mathbb{Q}$, also $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Beweis entfällt, kann man sich aber schnell denken, wenn man überlegt, dass die Bälle in der standart topologie gerade son kleines ϵ um den Punkt x sind. und $\mathbb{Q}$ ja dicht in $\mathbb{R}$ ist, also muess der Abschluss von $\mathbb{Q}$ genau allen reelen Zaheln entsprechen.

15 Folgen in Metrischen Räumen

Im folgenden ist X immer als ein Metrischer Raum zu verstehen mit der standart Topologie von einer distanzfunktion $d(x,y) = \|x-y\|$.
Eine Folge in einem Metrischen Raum ist eine Liste an Elementen $x_1, x_2, x_3, .., x_n, ..$ aus X, bei der Wiederholungen von Elementen erlaubt ist und die Reihenfolge eine wichtige Rolle spielt.

15.0.1 Folgen

Eine Folge in einem Metrischen Raum (X,d) ist eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und dem Wertebereich X.

$$x : \mathbb{N} \to X$$

Wir schreiben $x(n) = x_n$, und halten fest, dass wir eine Folge anhand ihrer Bilder identifizieren: $(x_0, x_1, x_2, ...) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um diese Notation zu vereinfachen schreiben wir oft einfach nur (x_n).

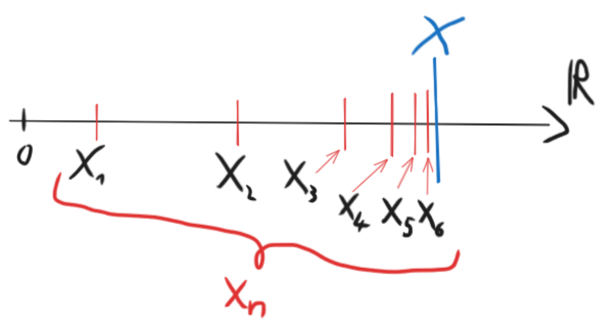
Eine Teilfolge erhält man, wenn man elemente aus der Folge rausstreicht, ohne dabei die Reihenfolge der übrigen Folgenglieder zu verändern.

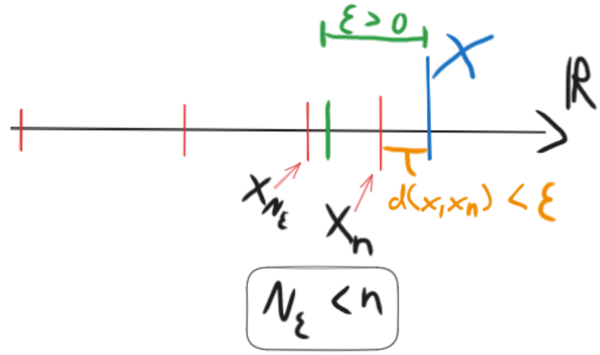
Also ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge mit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit n_k strikt wachsende Folge von natürlichen Zahlen $n_k > n_{k'}$ für $k > k'$. Offensichtlich folgt für alle Teilfolgen: $n_k \geq k$.

Eine Folge konvergiert, wenn sie für $n \to \infty$ einen fixen Wert anstrebt.

15.0.2 Konvergenz

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d) konvergiert zu x, wenn für jedes $\epsilon > 0$ es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n > N_\epsilon \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon$.





Alternativ kann man sagen, dass für jeden Ball um x: $B_\epsilon(x)$ ein N_ϵ existiert, sodass aus $n > N_\epsilon$ folgt $x_n \in B_\epsilon(x)$
Was da steht ist, dass es für jedes $\epsilon > 0$ einen Wert gibt, nennen wir ihn N_ϵ, ab dem jedes nachfolgende Folgenglied noch näher an x liegt als das ϵ mit dem wir gestartet sind.

Wir notieren diesen Grenzwert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, oder einfach $\lim x_n = x$, $x_n \to x$. Dieser Punkt x wird das Limit(Grenzwert) von x_n genannt.

Diese Definiton kann einfach auf Topologische Räume erweitert werden.
Grenzwerte von Folgen sind tatsächlich stark mit den Limits Points von Teilräumen von Metrischen Räumen verbunden.

15.0.3 Konvergenz von Teilfolgen

Eine Folge in (X, d) konvergiert genau dann, wenn jede seiner Teilfolgen konvergiert. Eine konvergierende Folge und all ihre Teilfolgen konvergieren gegen den selben Grenzwert.

15.0.4 Grenzpunkte in metrischen Räumen sind Grenzwerte von Folgen

Ein Punkt x ist ein Häufungspunkt(Grenz-/Limitpunkt) von einer Teilmenge Y eines metrischen Raumes (X, y) genau dann, wenn es eine Folge (y_n) mit $y_n \in Y$, $y_n \neq x$ gibt, sodass $\lim y_n = x$.

15.0.5 Sequentielle Stetigkeit

In metrischen Räumen die Grenzwerte gehen durch stetige Funktionen. *Ich habe echt keine Ahnung was dieser Satz mir sagen soll xD.*
Für zwei metrische Räume X und Y nennt man eine Funktion $f : X \to Y$ "sequentiell stetig" (sequentially continuous), wenn für alle $(x_n) \subset X$ mit $x_n \to x \in X$, die Folge $(f(x_n))_n \subset Y$ dann auch gegen $f(x)$ konvergiert, also $(f(x_n))_n \to f(x)$.
Man kann zeigen, dass für egal welche Topologischen Räuem X und Y, eine stetige Funktion auch sequentiell stetig ist.
Die Umkehrung dessen ist allerdings nicht immer wahr, allerdings wenn der Topoloische Raum X first countable ist, gilt auch die Umkehrung.

15.0.6 Sequentielle Stetigkeit in metrsichen Räumen

Seien X und Y metrische Räume, dann ist die Funktion $f : X \to Y$ sequentiell stetig genau dann, wenn sie stetig ist.

15.0.7 Stetigkeit Distanzfunktionen

Jede Distanzfunktion ist in jedem Argument stetig.

15.1 Cauchy Folgen

Eine Cauchy Folge ist eine Folge, deren Folgenglieber mit wachsendem n, immer näher "zuasmmenrücken".

15.1.1 Definition Cauchy Folge

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X, d) heißt eine Cauchy Folgen, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ ,sodass } m, n > N_\epsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Jede konvergierende Folge ist eine Cauchy Folge, aber nicht jede Cauchy Folge konvergiert. Ein Beispiel hierfür soll die rekursive Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}),\ x_0 = 1$ sein, die in $\mathbb{Q}$ eine Cauchy Folge ist, aber in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert.

15.1.2 Konverenz von Teilcauchyhfolgen

Eine Cauchy Folge in (X, d) konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergierende Teilfolge hat.

15.1.3 Beweis

Make yourself a cup of tea, but as tea you will use different sort of grass that is near your. After drinking it, you will feel sick, thats normal. Then after 1 Day of suffering the proof will come to you by magic.
Everthing has its cost.

15.1.4 In Metrsichen Räume, Kompakt = sequentiell kompakt

Eine Teilmenge $K \subset X$ eines Topologischen Raumes X heißt sequentiell kompakt, wenn jede Folge in K eine Teilfolge hat, die gegen einen Punkt in K konvergiert.

In einem metrischen Raum (X, d) ist $K \subset X$, genau dann kompakt, wenn sie sequentiell kompakt ist.

15.1.5 Beweis

This is the 1111'th line in the Latex code. To unlock this proof, you will need to write an latex document with at least 2222 lines. You're welcome.

15.1.6 Cauchy komplette Räume

Ein metrischer Raum, indem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt Cauchy komplett.

Nicht alle Räume sind Cauchy komplett. Zum Beispiel ist der $\mathbb{Q}$ nicht cauchy komplett. Schaut man sich die Folgen an, die sich der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ nähern, so konvergieren diese nicht in $\mathbb{Q}$.
Wenn man mit einem cauchy inkompletten Raum beginnt, kann man sich darauf einen cauchy kompletten bauen, indem man dem Raum alle Limtis der sich ihn ihm befindenden Cauchy Folgen hinzufügt. So kann man sich auch die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ aus den rationalen bauen $\mathbb{Q}$.

15.2 Fixpunktsatz von Banach

Eine kontrahierende Abbildung T auf einem (nicht leeren) vollständigen Cauchy-metrischen Raum (X, d) besitzt einen Fixpunkt $x*$, d. h. $T(x*) = x*$.

Weiter noch für jedes x_0 gilt die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = T(x_n)$ für $n \geq 0$
Dabei gilt für den Abstand zwischen dem Fixpunkt $x*$ und jedem Folglied x_n die Abschätzung:

$$d(x*, x_n) < \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

.

Sie konvergiert also und $\lim x_n = x*$.

Der Fixpunkt existiert allerdings bereits unter schwächeren Bedingugen. Nähmlich wenn $d(T(x), T(y)) \leq d(x, y)$, wenn (X, d) kompakt ist.

15.2.1 Beweis

Take two chairs, stand on one of them, look at the other chair and realize that you have no friend standing with you on the other chair, get depressed then logically apply for a maths major and write the proof yourself.

16 Folgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^D$

16.1 Homogene lineare Differenzengleichung

Oft kommen auch rekursiv definierte Folgen vor, indenen ein Term in abhängigkeit von endlich vielen seiner vorgänger definiert ist.

$$x_{n+q} = F(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+q-1})$$

Wenn F stetig ist, ist das Limit einer rekursiven Folge,wenn es existiert, die Lösung der Gleichung:

$$x* = F(x*, ...x*)$$

Betrachen wir nun die reelen oder komplexen Folgen. Wenn eine rekursiv-definierte Folge nicht konvergiert, ist man daran interessiert eine "geschlossene" Formel für x_n zu finden. *also son bissle wie eine Differentialgleciung aber halt mit Folgen.*

Ein oft auftretender Fall, der immer gelöst werden kann ist der, einer homogenen linearen rekursion mit konstanten Koeffizienten:

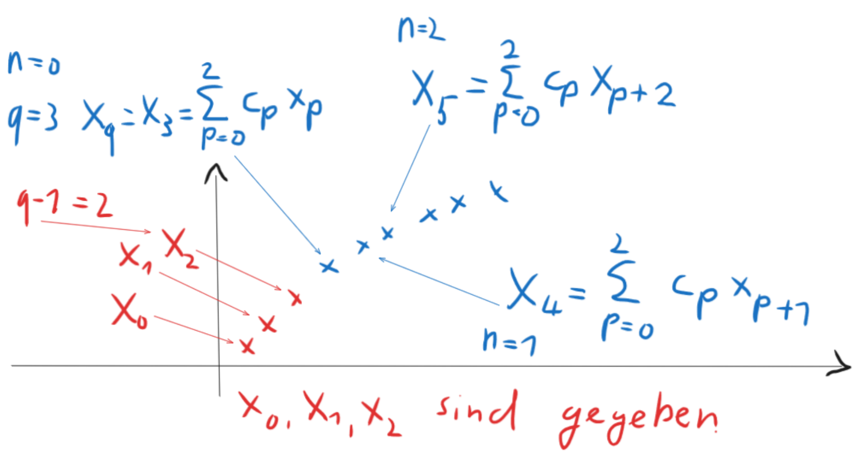
$$x_{n+q} = \sum_{p=0}^{q-1} c_p \ x_{n+p}, \quad x_0, x_1, x_2, ..., x_{q-1}$$

wobei die c_p fixiert, also konstant sind. Um nun eine Folge zu starten müssen wir die ersten x_n $'s$ gegeben bekommen.

Was damit jetzt gemeint ist, ist folgendes: Wir haben x_0 bis x_{q-1} vorgegeben, das heißt das nächste Folgenglied wäre x_q, welches wir nicht vorgegeben haben, aber durch $n = 0$ errechnen können, nähmlich durch die Summe:

$$x_q = \sum_{p=0}^{q-1} c_p \ x_p = c_0 x_0 + c_1 x_1 +,,, + c_{q-1} x_{q-1}$$

*Da wir ja alle bis x_{q-1} vorgegeben haben, und die c_p $'s$, alle fixiert sind, können wir uns so die Folgengleider ausrechnen, die nachden vorgegebenen kommen werden. Insbesondere wenn man n erhöht, werden weitere Folgenlglieder **nach** x_{q-1} ausgerechnet.*



Lineare Rekursionen können immer als endliche Differenz Gleichungen übersetztz werden. Das macht man mithilfe des endlichen-differenz-Operator Δ.

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n,\ (\Delta^{k+1}x)_n = \big(\Delta(\Delta^k x)\big)_n,\ x_{n+p} = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} (\Delta^k x)_n$$

Der erste Ausdruck hier, ist die Definition des Differenzenoperators Δ, also ist Δx_n genau die differenz von dem n+1tem Folgen glied mit dem n-ten Folgenglied.
Bei der Folge:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

Ist $(\Delta x)_5 = x_{n+1} - x_n = 5 - 3 = 2$
Der zweite Ausdruck hier oben, beschreibt die mehrfache Ausführung des Differenzenoperators auf ein x_n. Für $k = 1$ gilt folgendes:

$$(\Delta^{k+1}x)_n = (\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$

So kann man sich apperently jede lineare rekursion auch mit dem dritten ausdruck oben, auch definierren.

Wenn mir das jemand anschaulich erklären kann, dann bitte tut so

Das ergibt eine direkte paralele von den rekursionen zu den Diffenzialgleichungen.

Leider habe ich keine Ahnung was Bro mit dem folgenden Abschnitt zur Lösung von solchen Dingen meint.
Ich hab mich aber online Schlau gemacht:

Hier ein gutes Erklärvideo:
Gutes Video
Zweites gutes Video, erst nach dem ersten Anschauen

Gegeben sei eine rekursiv definierte Folge und ein paar Anfangsbedingungen.

Bsp. $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ *mit* $a_0 = 1, a_1 = 8$
Die Vorgehensweise ist dabei immer recht gleich:

1. Charakteristisches Polynom aufstellen:

   Das geht indem wir a_n durch r^n ersetzen:

   Also in unserem Fall: $r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$

2. Danach jeden Summanten mit dem geringsten Exponent (n-2) dividieren

   Aus unserem Beispiel wird dann: $r^2 - r - 6 = 0$

   Anderes Beispiel: aus $a_{n-3} + 5a_n$ *wird dann* $1 + 5r^3$

3. Polynom faktorisieren:

   aus $r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r-3)(r+2)$, *also r = 3,-2 sind Nullstellen.*

4. Die Form von a_n aufschreiben:

   $a_n = \sum_i d_i (Nullstellen)^n$

   $a_n = \alpha(3)^n + \beta(-2)^n$

   D.h. die Nullstellen mit einem Koeefizienten versehen und dann mit n potenzieren und alle addieren.

5. Mithilfe der Anfangsbedingungen nach den Koeefizienetne α etc. auflösen.

   $a_0 = 1 = \alpha(3)^0 + \beta(-2)^0 = \alpha + \beta$

   $a_1 = 8 = \alpha(3)^1 + \beta(-2)^1 = 3\alpha - 2\beta$

   Aus dem LGS ergibt sich dann: $\alpha = 2, \beta = -1$

6. Schön aufschreiben:

   $a_n = 2 \cdot (3)^n + (-1) \cdot (-2)^n$

Es gibt ein paar Sonderfall:
Wenn man doppelte Nullstellen hat, also das Polynom in $(r-2)(r-2)$ zerfällt zum Beispiel, muss man Folgenden Trick anwenden.

$$a_n = \alpha(2)^n + \beta n(2)^n$$

Also pro algebraische Vielfachheit einfach eine Potenz von n hinzufügen. Wenn Polynom in $(r-2)^3$ zerfällt, sieht das so aus:

$$a_n = \alpha(2)^n + \beta n(2)^n + \gamma n^2(2)^n$$

16.2 Satz von der monotonen Konvergenz

Ein interessanter Fall von Folgen in $\mathbb{R}$ sind die der monotonen, beschränken.

16.2.1 Definiton

Eine Funktion in $\mathbb{R}$ heißt:

- monoton wachsend, wenn $a_n \geq a_p$ für $n > p$
- monoton fallend, wenn $a_n \leq a_p$ für $n > p$
- beschränkt, wenn jedes $|a_n| \leq M$ für ein festes M

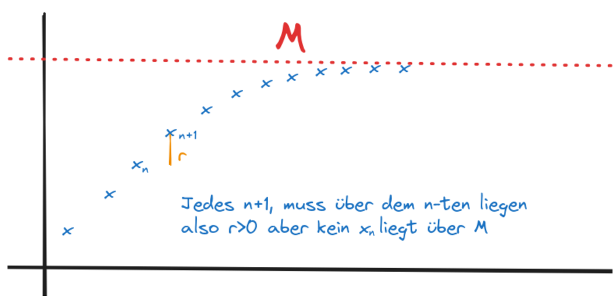
16.2.2 Monotone Konergenz Theorem

Eine Folge (x_n), mit $x_n \in \mathbb{R}$, die monoton und beschränkt ist, konvergiert. Wenn die Folge monoton wachsend ist, konvergiert sie gegen ihr Supremum. Bei monoton fallend gegen ihr infimum.

16.2.3 Beweis

Read da Skripdt, work da Skripdt!

16.2.4 Beispiel



16.2.5 Wichtige Konvergenzen (Bernoulli Ungleichung)

Bernoulli Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \text{ für reele x, und } x > -1,\ n \in \mathbb{N}$$

Wichtige Konvergenzen

- $\forall s \in \mathbb{Q}_{>0} \lim \frac{1}{n^s} = 0$

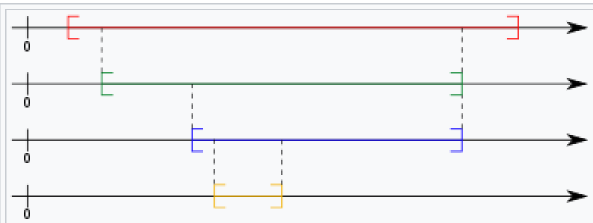
- $\forall a > 0 \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$
- $\lim n^{1/n} = 1$
- $0 < q < 1, \lim q^n = 0$
- für $n \in \mathbb{N}, x > 1, \lim \frac{n^k}{x^n} = 0$
- $\lim_n \frac{x^n}{n!} = 0$ für jedes reele x

16.3 Satz von Bolzano-Weierstrass

Wir haben gesehen, dass monotone, beschränkte Folgen konvergieren. Tatsächlich reicht die beschränktheit aus, für die konvergenz einer Teilfolge.

16.3.1 Intervallschachtelung

Sei $[a_n, b_n] \in \mathbb{R}$ eine Familie an geschachtelten geschlossenen Intervallen $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ mit den Natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ indiziert.
Gemeint ist eine Folge an Intervallen, woebi das Folgeintervall immer ein Teil des vorherigen Intervalls sein muss, dabei werden die intervalle beliebig klein.



4 members of a sequence of nested intervals

Wenn nun $\lim(a_n - b_n) = 0$ existiert genau eine reele Zahl $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

16.3.2 Beweis

The Reader should seek some literature on this subject.

16.3.3 Bolzano-Weierstrass Theorem

Eine Folge in $\mathbb{R}^D$ heißt beschränkt, wenn $\|a_n\| = d(a_n, 0) \leq M$. Für ein festes M. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^D$ hat eine konvergierende Teilfolge.

16.3.4 Beweis

Look on the Floor and you will see that this is super trivial.

16.4 $\mathbb{R}^D$ ist Cauchy komplett

Die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit der standart Topologie sind ein Cauchy kompletter metrischer Raum. Gleiches gilt für $\mathbb{R}^D$

16.4.1 Beweis

This proof can be visited at https://www.spielaffe.de/.

16.4.2 Folgerung

Die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ sind der Cauchy Abschluss von $\mathbb{Q}$.

16.4.3 Beweis

Close your eyes and submit your exmatirculation form, then the proof will be visible on the bottom of the Nekar.

16.5 Satz von Heine - Borel

Ein wichtiges Resultat ist die Charakterisierung von Kompakten Mengen in der standart Topologie $\mathbb{R}^D$. Eine Menge in $(\mathbb{R}^D, d)$ heißt beschränkt, wenn sie vollständig von einer (ausreichend großen) Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt überdeckt werden kann.

16.5.1 Satz

In der Standardtopologie ($\mathbb{R}^D$) gilt: Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Wikipedia definition

Für eine Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathbb{R}^D$ (der metrische Raum aller reellen n-Tupel mit der euklidischen Metrik) sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- *$\mathcal{M}$ ist beschränkt und abgeschlossen.*
- *Jede offene Überdeckung von $\mathcal{M}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung.*

Dieser Satz lässt sich speziell auf Teilmengen der Menge der reellen Zahlen

16.5.2 Beweis

Go to Instagram and follow @captain_jonis_mememuellhalde, the 24th post is the proof.
Bemerke, dass der Beweis die komplett-ness von $\mathbb{R}^D$ braucht, deswegen funktioniert es nicht für inkomplette metrische Räume wie den Ratrionalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Es funktioniert auch nicht in kompletten unendlich dimensionalen Räumen.

16.5.3 Folgerung

Die Inverse einer stetigen Bijektion zwischen zwei Hausdorff Räumen ist wieder stetig.

16.5.4 Beweis

Grab yourself a Banana and go tame a Polarbear with it, then ride on the Polarbear to the nearest Volcano and piss in it. Your piss will atomatically write the proof onto the Magma inside the volcano.

17 Reihen

Reihen sind unendliche Summen von Folgengliedern.

17.0.1 Definition

Startend bei einer Folge (a_n) in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, kann man eine Reihe bauen, indem man die Folgenglieder unendlich auffsummiert:

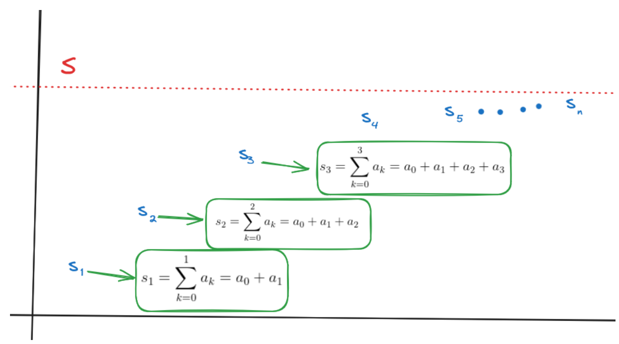
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Die Elemente a_n einer Folge (a_n) heißen allgemeine Terme der Reihe.

Eine Reihe...

- konvergiert, wenn die Folge an Teilsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert $s_n \to s$. In diesem Fall sagen wir, dass $\sum\limits_{k \leq 0} a_k$ konvergiert zu s.

  Kann man sich in etwa so vorstellen:



- konvergiert absolut, wenn die Reihe der absoluten Werte $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
- divergiert, wenn sie nicht konvergiert.

Bemerke, dass wenn eine Reihe konvergiert, dann muss der allgemeine Term $a_n = s_n - s_{n-1}$ gegen Null konvergieren $a_n \to 0$. (Ansonsten wäre die Folge der Partialsummen nicht Cauchy). Nicht nur dass, sondern sie muss schnell genug konvergieren.
Beispiele:

- $\sum_{k \leq 1} \frac{1}{k^2}$ - absolut konvergent
- $\sum_{k \leq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ - konvergent
- $\sum_{k \leq 1} \frac{1}{k}$ - divergiert

Also wenn eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch. Weiter noch $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$, daraus kann man schließen, dass wenn die Folge an Partialsummen von $\sum_k |a_k|$ Cauchy ist, dann auch die Folge der Partialsummen von $\sum_k a_k$.

Die Frage der Konvergenz einer Reihe ist immer wichtig. Zwei wichtige Arten von Reihen sind die:...

- **Geometrische Reihe**: Die geometrische Reihe sieht wie folgt aus:

  $$\sum_{k\leq 0} q^k$$

  Sie konvergiert absolut zu $\frac{1}{1-q}$ für $0 < q < 1$ und divergiert für $q \geq 1$

- **generalisierte Harmonische Reihe**: Die Reihe

  $$\xi(\alpha) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

  konvergiert absolut für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$. Mithilfe der Cauchy KOndensation (wird glei erklärt) sieht man, dass die Reihe sich verhält wie:

  $$\sum_{k\geq 1} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}$$

Reihen, die nur positive Summanten haben und konvergieren, konvergieren immer auch absolut.

17.1 Konvergenzkriterien

Gegeben sei eine generische Reihe mit:

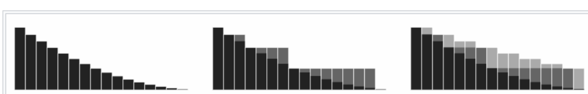
$$\sum_{k\geq 0} a_k$$

17.1.1 Cauchy Kondensation

Wenn $a_k \geq 0$ und die Folge a_k ist monoton fallend, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ genau dann wenn $\sum_{k\geq 1} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.
Weiternoch gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \leq \sum_{k\geq 1} 2^k a_{2^k} \leq 2 \sum_{k\geq 1} a_k$$

dabei ist a_{2^k} wirklich 2^k im Index, man kann das leider schlecht erkennen, aber der Index sind 2 HOCH k



Visualization of the above argument. Partial sums of the series $\sum f(n)$, $\sum 2^n f(2^n)$, and $2\sum f(n)$ are shown overlaid from left to right.

17.1.2 Beispiel

Einfaches Beispiel(weil ich die schwereren ned verstanden habe): Man nehme die Harmonische Reihe $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$, man erkennt $a_n = \frac{1}{n}$ ist Monoton fallend und immer größer null, also kann man jetzt ummodeln zu:

$$\sum_{n\geq1}\frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n\geq1} 2^n \frac{1}{2^k} = \sum_{n\geq1} 1$$

Diese Reihe divergiert offensichtlich, damit divergiert die ursprünglich auch.

17.1.3 Direkter Vergleich

Wenn für eine Folge $|a_k| \leq b_k$ gilt, dann heißt das auch, dass $b_k \geq 0$ sein muss. Man kann also folgern, dass wenn die Reihe $\sum_{k\geq1} b_k$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq1} a_k$ absolut und es gilt:

$$|\sum_{k\geq1} a_k| \leq \sum_{k\geq1} b_k$$

17.1.4 Beispiel

Man nehme die Reihe

$$\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2+k}$$

Hier sieht man nichr direkt, dass diese Reihe konvergiert oder nicht. Nutzen wir alldings folgende Abschätzung $n^2 + n > n^2$, können wir mit einer Reiher, deren Konvergenz wir kenne vergleichen.

$$\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2+k} \leq \sum_{k\geq1}\frac{1}{k^2}$$

Da die "Basler Reihe" (das Ding rechts) bekannterweise konvergiert, und immer größer ist, als der Betrag unserer ursprüngliche Reihe, wissen wir, dass unsere urpsrüngliche Reihe absolut konvergiert.

17.1.5 Alternierende Reihen

Wenn eine Folge a_k monoton fallend ist und gegen Null konvergiert, $a_k \to 0$, dann konvergiert auch:

$$\sum_{k\geq1}(-1)^k a_k$$

Das folgt aus dem Intervallschachtelungs theorem.

17.1.6 Beispiel

Man nehme sich die Folge: $a_k = \frac{1}{k!}$, diese ist monoton fallend und konvergiert gegen 0. Bilden wir jetzt die Harmonische Reihe davon, konvergiert diese auch:

$$\sum_{k\geq0}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$$

17.1.7 Cauchy-Hadamard

Wir definieren:

$$r = \lim_{n\to\infty} (sup_{m\geq n}|a_m|^{\frac{1}{m}})$$

Wenn $r < 1$ konvergiert die zugehörige Reihe absolut. Wenn $r > 1$ divergiert die dazugehöreige Reihe.

17.1.8 Beispiel

Ich find kein gutes Beispiel, vllt. kann ja wer nachhelfen.

17.1.9 Quotientenkriterium

Wenn $\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = r$, dann konvergiert a_n, wenn $r < 1$ und divergiert für $r > 1$.

17.1.10 Beispiel

Sei nun die zugrundeliegende Folge $a_k = \frac{1}{k!}$. In das Kiretium eingesetzt:

$$r = \lim_{k\to\infty} |\frac{1/(k+1)}{1/k}| = \frac{1}{k+1} \to 0$$

Damit kleiner als 1 und somit konvergiert die Reihe.

17.1.11 Integralkriterium

Sei a_k eine Folge, die monoton fallen ist, und gegen Null konvergiert $a_k \to 0$
Wenn eine monoton fallende Funktion f existiert, sodass:

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+, f(k) = a_k$$

dann konvergiert die Reihe wenn:

$$\sum_{k\geq 1} a_n \Leftrightarrow \int_0^\infty f(k)dk < \infty$$

17.1.12 Beispiel

Sei $a_k = \frac{1}{k^2}$, dann ist $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert, als $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *da die Reihe bei k =1 starten muss, weil wir sonst durch 0 teilen, ist f(x) auch nur auf 1 bis unendlich definiert*
Durch Integrationskriterium folgt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty$$

17.1.13 Abeltest

Sei $\sum_{k\geq 0} a_k$ eine konvergierende Reihe und b_k eine monoton, beschränke Folge, dann konvergiert auch:

$$\sum_{k\geq 0} a_k \cdot b_k$$

17.1.14 Beispiel:

Ziemlich hart grad kein Bock dafürn Beispiel zu finden ey, naja!

18 Absolut konvergente Reihen

Absolut konvergente Reihen haben nochmal ein paar mehr einschränkende Eigenschaften.

18.1 Summe absolut konvergierenter Reihen

Die Summe einer absolut konvergierenden ist invariant unter vertauschung der einzelnen Terme der Reihe. Also wenn $\sum_k |a_k| < \infty$ gilt:

$$\sum_k a_k = A \Rightarrow \sum_k a_{\sigma(k)} = A, \;\; \forall \sigma \in S_n$$

Also die Reihenfolge, in der ich die Folgenglieder addieren ist ned wichtig, es kommt beidesmale A raus, dabei ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}(bijektiv)$

18.1.1 Beweis

You will need to go to your Car and remove the air from all the Tires. Then let your bestfriend drive to Italy with this car. He will return with the Proof.

18.2 Cauchy Produkt

Das Cauchy Produkt zweier Reihen $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{k\geq 0} b_k$ ist die Reihe:

$$\sum_{p\geq 0} c_p, \;\; c_p = \sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$$

Es gilt:

- Wenn beide Reihen konvergieren und mindestens eine Reihe absolut kovergiert, dann konvergiert das Cauchy Produkt $\sum_{p\geq 0} c_p$ auch und zwar zu $(\sum_{k\geq 0} a_k) \cdot (\sum_{k\geq 0} b_k)$
- Wenn beide Reihen absolut konvergieren, konvergiert das Cauchy Produkt auch absolut.

18.2.1 Beweis

One should go to the Amazonas and be accepted into an Tribe there. Then after 2 Years one can ask the Shaman of that Tribe, if he or she knows the Proof.
We know that one Shaman of one tribe knows the proof, but we dont know which tribe it was, so one would need to iterate through all of them until the Proof is found.
NEVER ask the Shaman before you havent lived within the tribe for at least 2 Years, otherwise you'll be eaten.

18.2.2 Beispiel

Seien Beispielsweise die beiden Folgen $a_k = b_k = \frac{1}{2^k}$.
Dann ist das Cauchy Produkt definiert als:

$$c_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{p-k}} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^p} = \frac{p+1}{2^p} \Rightarrow \sum_{p\geq 0} \frac{p+1}{2^p}$$

19 Potenzreihen

Eine wichtige Teilklasse der Reihen, sind Potenzreihen. SIe sind die generalisierung von Polynomen der Form $P(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n$, wobei z_0 eine feste komplexe Zahl ist, die den Mittelpunkt der Konvergenzscheibe aufzeigt und z eine komplexe Variable ist.

19.1 Folgerung für konvergenz

Sei $P(z)$ eine Potenzreihe. Wenn diese für ein z konvergiert, dann konvergiert auch die Potenzreihe $P(z')$ für alle z', für die gilt: $|z' - z_0| < |z - z_0|$

19.1.1 Beweis

Close your eyes at exactly 22:00 on the Date 21.08.2024. Then look in the Sky.
If your are in front of the Mathematikon a wyld Captain will spawn and give you Mate and explain cette Proof.

19.2 Konvergenzradius

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe ist die nichtnegative reele Zahl $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass die Reihe konvergiert, wenn $|z - z_0| < r$ und divergiert, wenn $|z - z_0| > r$ In anderen Worten:

$$r = \sup\{|z - z_0| \mid |P(z)| < \infty\}$$

r ist also das Supremum der Menge, aller z , für die P(z)konvergiert
Die Konvergenzscheibe einer Potenzreihe ist der offene Ball (Scheibe)

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z - z_0| < r\}$$

Die Potenzreihe konvergiert für alle z innerhalb dieser Scheibe.

Den Konvergenzradius berechnet man wie folgt:

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Der Konvergenzradius kann man auch mit:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

berechnen, sofern dieses Limit exisitert. Beispielsweise kann man so den Konvergenzradius der Geometrischen Reihe git Berechnen $\sum_{n\geq 0} z^n$, dieser ist $r = 1$.

19.3 Folgerung

Sei $P(z)$ eine Potenzreihe, und wähle ein z, sodass $|z - z_0| \leq p < r$. Dann existiert eine Konstante C, sodass:

$$|P(z) - \sum_{n=0}^{N} c_n(z - z_0)^N| \ \leq \ C \cdot |z - z_0|^{N+1}$$

19.3.1 Beweis

The Proof of this Lemma ist found in the Sewage System of Heidelberg. Right arround the Corner where the Aligator lives.

20 Exponentialfunktion

Viele simple Funktionen sind über Potenzreihen definiert.

20.1 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist z.b. defineirt als:

$$exp(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$$

Deren Konvergenzradius ist:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

Das heißt, die Exponentialfunktion konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$
Das ist fancy ausgedrückt, für ich kann jedes $z \in \mathbb{C}$ in $f(x) = e^x$ einsetzten und bekomme eine Zahl heraus, es gibt also keine Definitionslücken oder so

20.2 Folgerungen/Eigenschaften

- Es gilt: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$
- $e^z \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

20.2.1 Beweis

The Proof will be available if you purchase the Winter-DLC of this Skript.

21 Vektorgeraums

Ein Vektorraum ist definiert über einem Körper K. Weiter noch ist ein Vektorraum eine Menge V, die mit zwei Operationen vertraut ist:

- **Addition** $+ : V \times V \to V$, sodass (v,+,0) eine ablesche Gruppe ist.
- **skalara Multiplikation** $\cdot \ : K \times V \to V$, sodass gilt:
  - $\cdot$ ist kompatibel mit der Multiplikation $\times$ im Körper
    $$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \times \beta) \cdot x, \forall x \in V, \quad \alpha, \beta \in K$$
  - Das neutrale Elemtent bezüglich der Multiplikation in K, ist auch in V neutrales Element.
    $$1 \cdot x = x$$
  - $\cdot$ ist distributiv mit der Addition im Körper und im Vektrraum V:
    $$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \qquad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

Den Körper nennen wir nun Skalarkörper.

21.0.1 $\mathbb{R}^D$

Im D- dimensionalen Raum $\mathbb{R}_D = \{x = (x_1, ...x_D) \mid x_\mu \in \mathbb{R}\}$, sehen die Operationen so aus:

- Addition: $x = \{x_1, ..., x_D\}, y = \{y_1, ..., y_D\} \Rightarrow x + y = \{x_1 + y_1, ..., x_D + y_D\}$
- S-Multiplkikation: Sei $x \in V, \alpha in K$, dann ist $\alpha \cdot x = \{\alpha x_1, ..., \alpha x_D\}$

Vekoträume sind abgeschlossen unter Linearkombinationen von Vektoren. Deswegen ist Begriff der Basis sinnvoll.

21.1 Hamel Basis / Basis

Eine Hamel Basis eines Vektorraums ist eine Teilmenge B von V für die gilt:

- Linear unabhängig: (Ich kann keinen Vektor in meiner Menge B durch lienarkombnation von anderen Vektoren in B darstellen.)
- Erzeugend: Also die Vektorren in B müssen durch Linearkombination jeden Vektor in V darstellen können. Also $Span(B) = V$.

21.2 Jeder Vektorraum hat eine Basis

Jeder Vektorraum hat eine Hamel Basis und alle Hamel Basen eines Vektorraums haben diegleiche Kardinalität. Die Kardinalität einer Hamel Basis, heißt die Dimension des Vekorraums.

Ist die Dimension endlich, sagen wir nur Basis.

21.2.1 Beweis

You need to close your eyes, lay down and the listen to "Winter" from OVERWERK. Then you'll never need this Proof.

22 Endlich Dimensionale Vektorräume

In diesem Abschnitt sind alle Vektorräume endlich Dimensional.

22.1 Austauschsatz von Steinnitz

Sei U und W endliche Teilmengen eines Vektorraums V, wenn U linear unabhängig ist, und span(W) = V, dann gilt:

- $|U| \leq |W|$ *Erinnere, mit || notierten wir die Kardinalität einer Menge*
- $\exists W' \subset W$, mit $|W'| = |W| - |U|$, sodass $span(U \cup W') = V$

Im endlich dimensionalen Fall können wir eine Basis bauen, indem wir die Basis eines Unterraumens erweitern.

22.1.1 Beweis

The Reader should remember to drink more, especially in the Summer. After that one can think about the Proof of this.

22.2 Unterraum

Ein Unterraum U ist eine Teilmenge von V, die mit den selben Operationen von V selbst wieder einen Vektorraum bildet.

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, dann gilt:

- Die Anzahl der Basisvektoren stimmen in jeder Basis von V überein.
- Jede Menge an linear unabhängen Vektoren, deren Kardinalität gleich der Dimension des Raums ist, ist eine Basis. *Also wenn die dimension n ist, und wir eine Menge an lin.unab. Vektoren haben, die n groß ist, ist das eine Basis* .

  Auch Rückwerts, jede Menge, die den Raum V aufspannt und die Karidinalität gleich der Dimension hat, ist linear unabhängig.
- Jede Basis eines Unterraums lässt sich erweitern zu einer Basis des gesammten Raumes.
- Wenn U_1 und U_2 beides Unterräume von V sind, dann ist $U_1 \cap U_2$ auch ein Unterraum von V

Ein Operator $A : X \to Y$, von zwei Vektorräumen heißt linear, wenn gilt:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Oft schreiben wir anstatt A(x) einfach nur Ax.

22.3 Kern und Bild

Sei $A : X \rightarrow Y$ ein lineare Operator auf einem endlich dimensionalen Vektorraum X, dann ist:

- **Der Kern von A** $ker(A) = \{x \in X \mid Ax = 0\}$ *also alle Vektoren aus X, die auf die Null abgebildet werden*
- **Das Bild von A** $Im(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, Ax = y\}$ *also die menge, aller y's , die von A getroffen werden*

Der Kern und das Bild sind jeweils Unterräume!

22.4 Dimensionssatz

Sei $A : X \rightarrow Y$ ein lineare Operator auf einem endlich dimensionalen Vektorraum X, dann gilt:

$$dim(ker(A)) + dim(Im(A)) = dim(X)$$

Also die Dimension des Kernes plus die Dimension des Bildes, ergibt die dimension des "Definitionsraumes"

22.4.1 Beweis

Grab your Bicicle and go on a little tour throught your nearest forest. If you scream "Abraxas" tree times, then a squirrel will appear and give you the Proof.

23 Normierte Räume/Banach Räume

Räume mit noch mehr stuktur sind Normierte Räume.

23.1 Norm

Eine Norm auf einem K-Vektorraum V, ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$, sodass folgendes gilt:

- $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|,\ \forall \alpha \in K, \forall x \in V$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Jeder normierte Vektorraum ist ein metrischer Raum, mit der Distanzfunktion $d(x, y) = \|x - y\|$

23.2 Banachraum

Ein Banachraum ist ein normierter Vektorraum, der Cauchy komplett ist.

23.2.1 Beispiel

Die Räume $\mathbb{R}^D$ und $\mathbb{C}^D$ sind normierte Räume (sogar Banachräume) mit der p- Norm:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{u=1}^{D} |x_u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

23.2.2 Beispiel 2:

Die Menge an beschränkten reelen oder komplexen Funktionen auf irgendeiner Menge,

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \middle| \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty < \infty \right\}$$

ist zusammen mit der Supremumsnorm ein Banachraum.

23.2.3 Beweis

The proof is left as an exercice to the Reader.

23.3 Separabler Raum

Ein Topologischer Raum X heißt seperabel, wenn er eine abzählbare und dichte Teilmenge enthält. Also X enthält eine Folge (x_n), sodass jede offene Menge mindestens ein Element dieser Folge enthält.

Dicht heißt wieder, dass zwishcen jeden 2 Punkten, noch ein punkt, dazwischen liegt. Allgemeiner kann man das aber sagen als: Jeder Punkt in X ist entweder Teil der Menge, oder ein Randpunkt. Gegeben sei also X als Topologischer Raum und eine Teilmenge von X, namens S, die dicht ist.

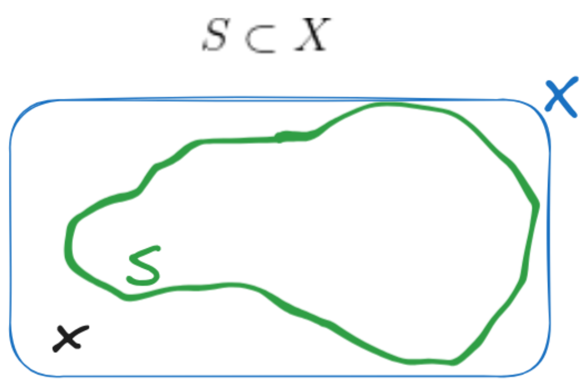
Dann ist in einem seperablen Raum, jeder Punkt in X entweder in S oder ein Randpunkt von S. In anderen Worten. Der Abschluss von S ist X:

$$\overline{S} = X$$

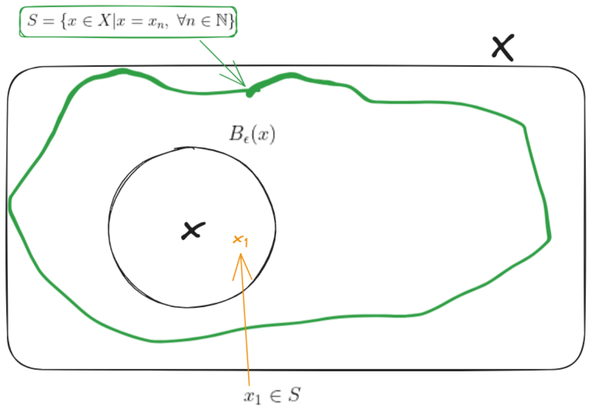
Die Definition übe die Folge ist nur eine andere Art die Dichtheit auszudrücken. Egal welche offene Menge (z.b. einen offenen ϵ- Ball um einen Punkt) man wählt, man wird immer ein weiteres Element der Folge x_n (Also ein Element aus S) darin finden.

Kleines Beispiel von Bing:
Um das anschaulicher zu machen, stelle dir vor, du hast einen Teich (das ist dein topologischer Raum X). Ein separabler Raum wäre so, als ob du eine Handvoll Steine in den Teich wirfst (das ist deine abzählbare, dichte Teilmenge). Die Steine sind so verteilt, dass, egal wo du im Teich hinschaust (das wäre deine "offene Menge"), du immer mindestens einen Stein sehen kannst. Das bedeutet, die Steine sind "dicht" im Teich verteilt.

Weiternoch kann ich das Video (und das danach) empfehlen:
Seperabler Raum Video



Das ist quasi der Raum X mit der dichten Menge S als Teilmenge. Man muss sich hierfür wirklich mal das kongrete Beispile der Reelen Zahlen anschauen, die Reelen Zahlen in er Standtart Topologie sind seperabel, weil sie die dichte Teilmenge $\mathbb{Q}$ enthalten. Und jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist ein limitpoint von $\mathbb{Q}$. (Man erinnere sich an die Limitpoints und die Definition über Dedekind Schnitte). Der Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ ist eben auch $\mathbb{R}$, wie wir in den vergangen Kapiteln gezeigt haben. Weiteres Beispiel für die Definition über die Folge:



Hier ist die dichte Folge S eingezeichnet, und egal welche offene Menge ich mir anschaue, werde ich ein Element aus S finden. Bezogen auf das Beispiel der Reelen Zahlen, ist wieder $\mathbb{Q}$ die dichte Teilmenge, aber wir denken uns die Rationalen Zahlen (da abzählbar) einfach als eine Folge:

$$x_n = \mathbb{Q}$$

Dann lässt sich auch schön sehen, dass ich zu jeder offenen Menge in $\mathbb{R}$ immer eine rationale Zahl finden kann, die dadrin liegt. (Also dicht ist).

23.3.1 Second Countable ist seperabel

Ist ein Topologischer Raum "second countable", also hat er eine Basis, die abzählbar ist, dann ist der Raum auch seperabel.
Man baut sich dann die dichte Teilmenge, indem man einfach eine Element pro Basiselement wählt.

23.3.2 Banachraumbeispiele

Schauen wir uns den Raum aller unendlichen Folgen in den Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{C} = K$ an, die bezüglich der p-norm konvergieren, also:

$$\ell^p(K) = \left\{ x = (x_n) \in K \middle| \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \ \ell^\infty(K) = \left\{ (x_n) \in K \middle| \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

Da wir wissen, wenn $1 \le q \le p \Rightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p$ folgt, dass $\ell^p \subset \ell^q$.
Wen's interessier, das folgt aus der Hölder Ungleichung. Ziemlich fancy, gehört hier aber nicht rein.

23.3.3 ℓ^p-Räume sind Banachräume

Die Räume $(\ell^p(K), \|\cdot\|_p)$ und $(\ell^\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$ sind Banachräume. $(\ell^p(K), \|\cdot\|_p)$ ist für $1 < p < \infty$ seperabel. Im Fall $p = \infty$ ist der nicht seperabel.

23.3.4 Beweis

Kiss your Butt, if you achieve this, the proof will be a trivial thing to to for you. (Tipp: A knife helps a LOT).

23.4 Schauder Basis

Sei $(V, K, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.
Eine Schauderbasis ist eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass es für alle Vektoren im Banachraum $\forall x \in V$, es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodoass gilt:

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n e_n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

Also wie eine Basis (das oben ist ja basically nur Linearkombination), nur das wir zulassen jetzt auch unendliche linearkombinationen zu bilden.
Für eine Schauderbasis gilt weiterhin folgendes:

- Die Elemente in (e_n) geordnet sein müssen, da sonst die Reihe (Linearkombination) nicht bedingungslos konvergieren würde.
- Wenn $\{e_n\}$ eine Schauderbasis von V ist, dann gilt: $V = \overline{\cup_{n=0}^{\infty} Span(\{e_0, ..., e_n\})}$
- Eine Schauer Basis ist immer abzählbar und die elemente in der Basis sind lienear unabhängig.

Die Räume ℓ^p haben eine Schauderbasis gegebn durch die Folgen e_n mit den Elementen $(e_n)_j = \delta_{nj}$
Jede Folge $x = (x_n)$ lässt sich schreiben als:

$$x = \sum_{n\geq 0} x_n e_n$$

Also eine Folge, deren Reihe zusammen mit den Basiselementenfolge zu einem Vektor konvergiert. Wenn ich also in meiner Norm, die differenz meines Vektors x mit der Reihe die gegen Ihr konvergiert bilde, so konvergiert diese DIfferenz gegen Null.

$$\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\|_p \to_{N\to\infty} 0$$

Weiternoch hat ℓ^∞ keine Schauerbasis

23.4.1 Banachräume mit Schauderbasis sind seperabel

Wenn ein Banachraum eine Schauderbasis besitzt, so ist er seperabel. Aber nicht jeder seperable Banachraum hat eine Schauderbasis.

23.4.2 Beweis

The Reader should go on and have a shit like Kimi Räikkönen. After that you will not be intereseted in this Proof, hence it is not important.

23.5 Lineare Operatoren

23.5.1 Lineare Operatoren und Stetigkeit

Ein Lineare Operator $A : V \to Y$ von einem genormten Raum in einen anderen genormten Raum, also ein Operator A für den gilt:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \ \forall \alpha, \beta \in K = \mathbb{R}(\mathbb{C}), \ \forall x, y \in V$$

Dieser Operator ist stetig, genau dann wenn eine positiv reele Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, sodass:

$$\|Av\| \leq c\|v\|, \quad \forall v \in V$$

23.5.2 Beweis

Open a bottle of Beer, then close it! Because you know that alcohol is a drug, that harms you. You will need to be sober for at least 30Years to understand this Proof, therefore it is not necesary to write it down.

23.5.3 Operator Norm

Wir definieren die Operatoren Norm, für einen Operator A als:

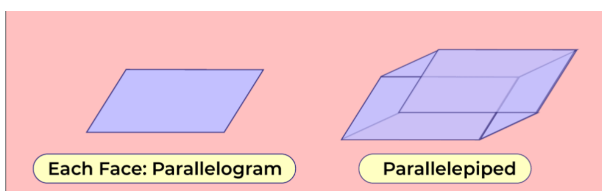
$$\|A\|_{op.} = \inf\left\{c \geq 0 \middle| \|Av\| \leq c\|v\|, \forall v \in V\right\}$$

Also das Infimum (kleinste) der Menge aller c's, sodass für jeden Vektor gilt, das c-fache ist größer als das Bild des Vektors unter dem Operator A Äquivalente Aussagen sind:

$$\|A\|_{op.} = \sup_{v \in V} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in V, \|v\|=1} \|Av\|$$

In endlich dimensionalen Fällen macht ein Operator $A : X \to X$ nichts andere als Vektoren zu übersetzte, drehen oder strecken.

Bei einem Paralellepiped:



Dessen Seiten durch die Vektoren e_i gegeben sind, wird durch ein A auf die Vektoren $f_i = Ae_i$ gemapped. Das Volumen des neuen Parallelpiped steht im verhältniss zum ursprünglichen, nähmlich:

$$Vol(f_1, ...f_D) = det(A) \cdot Vol(e_1, ..., e_D)$$

Es gilt weiter:

$$\|A(x) - A(y)\|_2 \leq (max_\lambda |\lambda|)\|x - y\|_2, \text{wobei } \lambda \text{ Eigenwerte sind von} \sqrt{AA\dagger}$$

Dabei ist $A\dagger$ anscheinend die adjungierte Matrix von A.

24 Funktionen

Im metrischen Räumen nutzen wir eine andere Definiton von Stetigkeit.

25 Stetigkeit

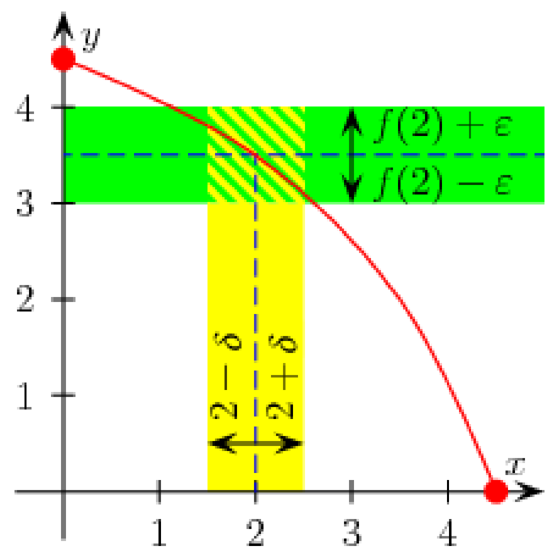
25.1 Das $\epsilon - \delta$- Kriterium

Seien X und Y metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x \in X$, genau dann wenn $\forall \epsilon > 0$ gilt:

$$\exists \delta_{\epsilon,x} > 0, \text{ sodass } d(x,y) < \delta_{\epsilon,x} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

$\delta_{\epsilon,x}$ ist nicht nur von ϵ sondern auch von x abhängig. Wenn f im Punkt x stetig ist, schreiben wir $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$.
Eine Funktion zwischen zwei Metrischen Räumen, die in jedem $x \in X$ stetig ist, heißt punktweise stetig.

Intuitiv bedeutet die Bedingung der Stetigkeit, dass zu jeder Änderung ϵ des Funktionswertes, die man zu akzeptieren bereit ist, eine maximale Änderung δ im Argument gefunden werden kann, die diese Vorgabe sicherstellt.



Veranschaulichung der $\epsilon - \delta$-Definition: für $\epsilon = 0,5$ erfüllt $\delta = 0,5$ die Stetigkeitsbedingung.

25.2 Stetig ist punkweise stetig

Eine Funktion zwischen zwei metrischen Räumen ist stetig genau dann, wenn sie punktweise stetig ist.

25.2.1 Beweis

You will need a lot of experience with Balls if you want to understand this proof.
Your Ball-EXP-Level ist still to low. You need more. Come back later if you have more Experince with Balls :=). $\epsilon = D$

25.3 Weiterführung, gleichmäsig stetig, Lipschitzstetig

Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen. gilt:

25.3.1 Puntkweise Stetig

Wurde bereits definiert: Punktweise stetig ists dann, wenn:

$$\forall x, \forall \epsilon > 0 \exists \delta_{\epsilon,x} \ : \ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

25.3.2 Fortsetzung

Die Funktion f kann fortgesetzt werden im Punkt x, wenn eine Funktion $\overline{f}$ existiert, deren Definitionsbereich x enthält und im Punkt x stetig ist und für den Definitionsbereich von f gilt:

$$\overline{f(x)} = f(x), \forall x \in X$$

Dabei ist X der Definitionsbereich von f.
Ich erweitere also nur meinen Definitionsbereich von f. Also sei $g : [-\pi.\pi] \to [-1,1],\ g(x) = \sin(x)$, so ist $h : \mathbb{R} \to [-1,1],\ h(x) = \sin(x)$, eine Fortsetzung von g

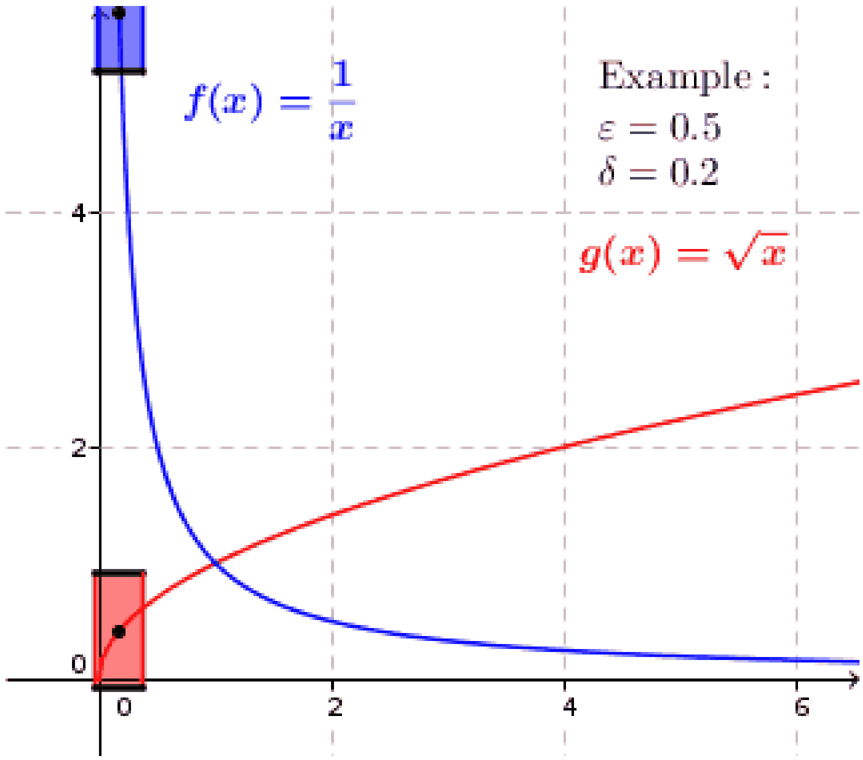
25.3.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Die Funktion ist gleichmäßig stetig auf X, wenn für jedes beliebige Paar an Elementen aus X gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon \forall x, y \in X : d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Die gleichmäßige stetigkeit ist also eine globale eigenschaft der Funktion, während die stetigkeit sich immer auf einen Punkt x bezieht, gilt die aussage der gleichmäßigen stetigkeit für jeden Punkt. Die gleichmäßige Stetigkeit geht darüber hinaus. Sie garantiert, dass wir für jedes $\epsilon > 0$ ein ***globales*** *$\delta > 0$ finden können, sodass egal welche Stelle wir betrachten, die Funktionswerte innerhalb des δ-Intervalls um diese Stelle einen Abstand kleiner als ϵ voneinander haben.*

Anders ausgedrückt: Bei gleichmäßig stetigen Funktionen können wir um jeden Punkt des Funktionsgraphen ein Rechteck mit Höhe ϵ und Breite δ einzeichnen, ohne dass der Graph direkt ober- oder unterhalb des Rechtecks liegt. D.h. für jede beliebig (kleines) ϵ werden wir ein δ finden, sodass es nicht oberhalb/unterhalb des Kastens verläuft. Wenn wir ein solches δ für irgendein ϵ nicht finden können, so ist es nicht gleichmäßig stetig.



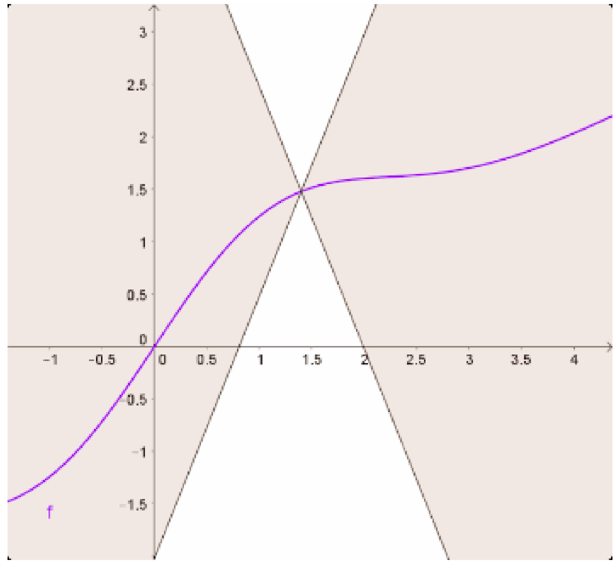
Diese Bild ist animiert, wenn man den richtigen pdf Reader hat, wenn die Boxen sich nach dem anklicken des Bildes nicht bewegen, kannst du hier schauen:
Wikiwand Animation

25.3.4 Lipschitzstetigkeit

Eine Funktion heißt Liptschitzstetig, mit einer Lipschitzkonstanten $L \geq 0$, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X \ : \ d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

Anschaulich gesprochen kann sich eine lipschitzstetige Funktion nur beschränkt schnell ändern: Alle Sekanten einer Funktion haben eine Steigung, deren Betrag nicht größer ist als die Lipschitzkonstante



Für eine lipschitzstetige Funktion existiert ein Doppelkegel (weiß), dessen Ursprung entlang des Graphen bewegt werden kann, sodass der Graph stets außerhalb des Doppelkegels bleibt.

25.4 Satz von Heine

Sei $f : K \to Y$ eine stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum K in einen anderen metrischen Raum Y, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

25.4.1 Beweis

Grab your Hair, and take a few strings of long hair out. If you have no long hair, you will need to grab the next best persons hair and take a few strings. Then make yourself a tee and drink it. After fully inhalng the tee, place the Hairstrings onto the Back of your sibling, if you have no sibling, get one.
Then yoru sibling will have a time windows of about 3 minutes in which he or she is able to provide the proof to you.

25.5 Gleichmäßige Konvergenz

Den Raum aller stetigen Funktionen von $X \to Y$ notieren wir mit:

$$\mathcal{C}(X,Y)$$

Oft sind wir an den Folgen von Funktionen interessiert $f_n(x)$ und deren Limits $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Also Folgen in $\mathcal{C}(X,Y)$.
Allerdings muss das Limit einer Folge von stetigen Funktionen nicht zwangsweise stetig sein.
Z.B:

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ f_n(x) = x^n,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \end{cases},$$

Wir sehen also $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ aber $f \notin \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0}$

25.5.1 Punkweise konvergierend, gleichmäsig konvergierend für Folgen an Funktionen

Seien X und Y metrische Räume. Die Folge an funktionen $f_n : X \to Y$ konvergiert punktweise zu $f : X \to Y$, wenn

$$\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Also genauer:

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x} : n > N_{\epsilon,x} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

Diese Notation nennen wir punktweise konvergierend, weil $N_{\epsilon,x}$ von x abhängen kann.

Eine stärkere Notation ist die der gleichmäßigen konvergenz von $f_n \to f$, wenn,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : \forall x \in X, n > N_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

Weil N_ϵ nicht von einem Punkt x abhängt, nennen wir das gleichmäßige konvergierend.

Die Idee bei gleichmäßiger konvergenz ist, dass $f_n(x)$ sich überrall mit der selben Rate zu $f(x)$ nähert. Wenn Y jetzt noch ein Banachraum ist, dann ist die gleichmäßige Konvergenz ident zur KOnvergenz in der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$
In der Definition sind die Qunatoren vertauscht, sonst sind sich diese ziemlich ähnlich. Der Unterscheid ist also, dass bei der Punktweise konvergenz für alle x so ein N existiert, und bei der Gleichmäßigen konvergenz existiert ein solches N für alle x. (Man stelle sich das so vor, im Fall der Pnktweise, kann ich ein für jedes x (dass dan fest ist) ein N finden. Bei der gelichmäsißegen ist es so, dass ich ein N finden muss(dass dan fest ist), sodass für alle x, die durchlaufen, die bedingung erfüllt ist)

25.5.2 Beispiel:

Es sei $0 < q < 1$ eine reelle Zahl. Die Funktionenfolge $(f_n\colon [0,q] \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f\colon [0,q] \to \mathbb{R};\ x \mapsto 0$. Dafür ist zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,q]} |f_n(x)| = 0.$$

Jedes der f_n ist auf $[0,q]$ nicht-negativ und monoton steigend, also $\sup_{x\in[0,q]} |f_n(x)| = q^n$ und wegen $q < 1$ geht dies gegen 0.

Die Angabe des Konvergenzbereiches ist hierbei unerlässlich: Die Folge $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf dem rechtsoffenen Einheitsintervall $[0,1)$ zwar immer noch punktweise gegen die Nullfunktion, jedoch *nicht* mehr gleichmäßig. Es gilt nun $\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| = 1$, insbesondere ist also

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| = 1 \neq 0.$$

Wenn ich das richtig verstanden habe, kann ich bei der punktweisen konvergenz mir ein x aus dem Definitionsbereich der Funktionen nehmen und das in die Funktion und die folge an funktionen einsetzten, und irgendwann ist das Limit der Folge an funktionen gleich dem funktionswert von f(x), jenachdem welches x ich aber nehme, konvergiert meine folge $f_n(x)$, schneller oder langsamer *gegen f(x), bei einer gleichmäßig konvergierenden Folge, ist es egla welches x ich nehme, und meine folge $f_n(x)$ nähert sich dem f(x) mit der selben geschwindigkeit, egel welches $x \in X$.*

Hier sieht man dann auch, warum die Quantoren in der Definition geswitched sind. In dem einen Fall muss so ein N einfach existieren (also jedes $x \in X$ hat sein eigenes N, also seine eigene "Geschwindigkeit" mit der es gegen f(x) konvergiert. Im anderen Fall haben jede $x \in X$ das selbe N, also dieselbe Geschwindigkeit, wie sie gegen f(x) konvergieren)

25.6 gleichmäßige Konvergenz Theorem

Seien X und Y metrische Räume.
Wenn die Folge $f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist auch $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

25.6.1 Beweis

Open up your brain and install a USB-C-Port, then connect yourself to a Computer and download the proof.

25.7 Folgerung

Nehme eine Potenzreihe um die 0 mit dem Konvergenzradius r. Für jedes $q < r$ konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in $\overline{B_q(0)}$ und definiert somit eine stetige Funktion.

25.7.1 Beweis

Take a car and drive over your left forearm. If you manage to not scream, the Pain that build up in a way that your Brain will overload and snap. After that snap you will see the Proof in front of you, even if it is the last thing you will see.

25.8 $\mathcal{C}_b(X,Y)$ ist ein Banachraum mit $\|\cdot\|_\infty$

Wenn Y ein Banachraum ist und X ein metrischer Raum, dann ist der Raum $\mathcal{C}_b(X,Y)$ bestehend aus beschränkten stetigen Funktionen von X zusammen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

Wenn X kompakt ist, ist jede stetige Funktion auf X beschränkt, also dann $\mathcal{C}_b(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$

25.8.1 Beweis

Look into the Sun for at least 3 Hours straight. BE CAREFULL not to blink to often, more blinking means more stress on your eyes and therefor could be harmfull.
After at elast 3 Houers, could be more though, you will start to see the proof in the Sun.

26 Stetige Funktionen mit einer Variable

Wir fokusieren und auf den Fall $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bemerke: Eine FUnktion f ist stetig auf dem geschlossenen Intervall $[a, b]$, wenn es stetig auf dem offenen Intervall $x \in (a, b)$ ist. und die Limits an den Endpunkten existieren, also $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ und $\lim_{x \nearrow b} f(x) = f(b)$.

26.1 Zweischenwertsatz

Stetige Funktionen springen nicht zwischen Werten.

26.1.1 Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f([a,b]) ein Invervall, für welches gilt:

$$[min\{f(a), f(b)\}, max\{f(a), f(b)\}] \subset f([a, b])$$

Das heißt jeder Punkt zwischen f(a) und f(b) wird von irgendeinem $x_i \in [a, b]$ angenommen.
Äquivalent dazu kann man sagen:
Für jedes $t \in [0, 1]$ $\exists c \in [a, b];\ f(c) = tf(a) + (1 - t)f(b)$.

26.1.2 Beweis

Go to www.sherm.fun, buy a sherm (or more), place it somewhere cool, upload the coordinates and the picture to the site (sherm.fun) and then write an email to proof@sherm.fun. Whithin a few days you will be rewarded with the proof.

26.1.3 Folgerung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval, wenn $f : I \to J = f(I) \subset \mathbb{R}$ ist strikt monoton und stetig auf I, dann ist f eine bijektion zwischen I und J. Dann ist J ein Interval und f^{-1} ist strikt monoton auf J.

26.1.4 Beweis

The Reader should consult a Therapist if this Proof is desired.

26.1.5 Weitere Definitionen

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, wenn $\forall \epsilon, \exists y;\ y > x \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, wenn $\forall L, \exists \delta;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > L$
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, wenn $\forall L, \exists y;\ x > y \Rightarrow f(x) > L$

26.2 Exponentialfunktion

26.2.1 Eigenschaften

Eingeschränkt auf reele Arguemnte ist die Eponentialfunktion monoton, stetig und Surjektiv auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$
Es folgt, das die Expontentialfunktion ein INverses hat, welches strikt wachsend und surjektiv ist. Wir nenne diese Funktion den natürlichen Logarythmus:

$$ln : \mathbb{R}_{>} \to \mathbb{R}, \quad ln(x) = y, \; e^y = x$$

Es folgt weiter:

$$e^{y_1} e^{y_2} = e^{y_1 + y_2} \quad \text{folgt} \quad ln(x_1 x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$$

Und nochmals weiter können wir endlich irrationale Exponenten definieren:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \quad x^\alpha = e^{\alpha ln(x)}$$

Ab hier fange ich übrigens an "Theorem" durch "Hot Take" zu ersetzten, weil lustiger

26.3 Extremwert Hot Take

Stetige Funktion auf kompakten Mengen nehmen ihre Extrema an. Bemerke, dass das Supremum c von jeder Teilmenge $S \subset \mathbb{R}$ kann kein innerer Punkt von S sein, da für jedes $\epsilon, B_\epsilon(c) = (c - \epsilon, c + \epsilon) \subsetneq S$, da kein Element in S größer als c ist.
Das Supremum ist also entweder:

- ein isolierter Punkt von S (und gehört zu S)
- ein Limit Punkt von S (dazugehörend oder nicht)

Tatsächlich ist jeder Punkt in S ist entweder isoliert oder ein Limit Punkt von S.
Da S eine Teilmenge der Reelen Zahlen ist, ist ein $x \in \mathbb{R}$ etnwedere ein limit Punkt (reele Zahl) oder ein isolierter Punkt (rationale Zahl). Ich weiß ned wie korrekt diese annalogie ist, aber es hilft vllt. zum vorstellen.
Wenn c nicht in S liegt, ist c ein Limit Punkt.
Da für jedes ϵ, $c - \epsilon -$ nicht das Supremum von S ist. Daraus folgt:
$B_\epsilon(c) \cap S = (B_\epsilon \cap S) \backslash \{c\} \neq \emptyset \Rightarrow$ c ist ein Limit Punkt.

26.3.1 Extremwert Hottake Definition

Reele Funktionen die auf kompakten Mengen stetig sind, nehmen ihr Extrema an.

Also für jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit einer Kompakten Menge K, existieren $x_m, x_n \in K$, sodass $f(x_m) = inf f(K)$ und $f(x_m) = sup f(K)$.

26.3.2 Beweis

To obtain this proof you will need to go on a Date with Captain Joni, talk to him and play a round of the bloody knuckles coin game. If you win you'll get the proof. (Its easy to win), but if you lose, Captain Joni gets your Soul.

26.3.3 Fundamental Hot Take der Algebra

Jedes Polynom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ mit Komplexen Koeefizienten $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ nimmt seine Nullstellen in $\mathbb{C}$ an. *Bzw. zerfällt komplett in Linearfaktoren* .

26.3.4 Beweis

This proof is to long to comprehend anyway, your tiktok and reel Brain couldnt concentrate for this amout of time without a subwaysurfer gameplay video.

26.3.5 In endlichen Dimensionen sind alle Normen equivalent?

Für jede zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf endliche Dimensionalen Banach Räumen V (also $\mathbb{R}^N$ oder $\mathbb{C}^N$) gibt es zwei Konstanten C_1, C_2, sodass:

$$C_1 \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C_2 \|x\|_b$$

26.3.6 Beweis

My dead Grandpa will tell you the next time you will see him. But i guess by then its not Important for you anymore.

27 Differenzierung in einer Variablen

Die Ableitung einer Funktion beschreibt wie die FUnktion sich verhält wenn ein Argument verändert wird. Eine Funktion h ist stetig im Punkt x_0, dann schreiben wir: $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$

27.0.1 Ableitung

Sei $f : \mathbb{R} \to V$, für V ein Banachraum $(V, \|\cdot\|)$. Wir sagen f ist differenzierbar im Punkt x_0, wenn die Funktion $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ von x, stetig erweitert werden kann im Punkt $x = x_0$.

Also im Punkt x_0 stetig erweiterbar
In diesem Fall schreiben wir:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \left(\forall \epsilon, \exists \delta; \text{sodass} |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right\| < \epsilon \right)$$

Wir nennen $f'(x_0)$ die Ableitung von f im Punkt x_0.

Wir nennen f differenzierbar auf dem Intervall I, wenn es an jedem Punkt $x_o \in I$ diffbar ist.

f heißt stetig diffbar, wenn $f'(x_0)$ eine stetige Funktion ist.

Den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen zwischen $\mathbb{R}$ und V, notiren wir mit $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, V)$.

Bemerke, dass $f(x) - f(x_0)$ ein Vektorn in V ist, und $\frac{1}{x-x_0}$ ein Skalar. Also ist $f'(x)$ auch ein Vektor in V.

Wir notieren nun e_k als Basis von V, dann ist $f(x) = \sum_k f_k(x) e_k$ und $f'(x) = \sum_k f'_k(x) e_k$.

Noch habe ich nicht ganz nachvollllzogen was der Bre mir damit sagen will.

27.0.2 Mittelwert Ungleichung

Sei $f : [x_1, x_2] \to V$ eine stetige Funktion auf $[x_1, x_2]$ und diffbar auf (x_1, x_2) Es gilt:

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq |x_2 - x_1| \sup_{x \in (x_1, x_2)} \|f'(x)\|$$

Also der Wert der steilsten Änderung multipliziert mit der Differenz der größten/kleinsten Eingabewerte ist immer größer gleich, der Norm der Differenz der $f(x_i)$ Vektoren, wobei x_i, wieder die größten/kleinst möglich eingabe ist.

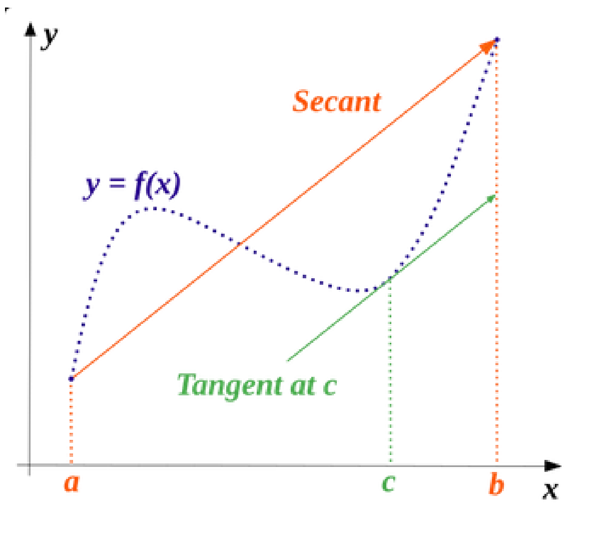
27.1 Der Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Reele Funktionen mit einer Variable.

27.1.1 Extrema, Roll's Hot Take, Zwischenwert Hot Take

Sei $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, f ist stetig auf $[x_1, x_2]$ und diffbar auf (x_1, x_2)

- **Extrempunkte:** f hat einen lokalen Extrempunkt bei $x_0 \in (x_1, x_2)$, wenn $f'(x_0) = 0$
- **Roll's Hot Take:** Wenn $f(x_1) = f(x_2)$, dann existiert ein $x \in (x_1, x_2)$, sodass $f'(x) = 0$
- **Mittelwert Hot Take:** $\exists x \in (x_1, x_2)$, sodass $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x)$



27.1.2 Beweis

Listen to your heart and think very very cleary about it. Then google it.

27.1.3 Konvexitäts Kriterium

Sei $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, f ist stetig auf $[x_1, x_2]$ und diffbar auf (x_1, x_2) Dann gilt:

- f ist monoton steigend genau dann, wenn $f' \geq 0$
- Wenn f zweifach diffbar auf (x_1, x_2) ist, ist f convex, wenn genau dann, wenn $f''(x) \geq, \forall x \in (x_1, x_2)$

27.1.4 Beweis

Text Captain Joni your favorite Metal Band, and he will send you the Proof.

27.2 Eigenschaften von Ableitungen

- **Leibnizregel** Sind f und g im Punkt x_0 diffbar, so ist es auch deren Produkt.

  Produktregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

- **Kettenregel** Wenn g diffbar in x_0 ist und f diffbar in $g(x_0)$, dann ist auch deren Komposition diffbar in x_0

  Kettenregel: $(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) \cdot g'(x_0)$

- Wenn $f = \sum\limits_{n \geq 0} c_n x^n$ eine Potenzreihe ist mit dem Konvergenzradius $r > 0$, dann ist $\sum\limits_{n \geq 1} n c_n x^{n-1}$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r und die Summe der Reihe ist $f'(x)$.

27.2.1 Regel von L'Hopital

Seien c und L $\in \mathbb{R}$ oder $(\pm\infty)$. Sei weiter I ein Intervall mit $c \in I$. (Wenn $c = \infty$, dann ist das Intervall einfach offen).
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ diffbar auf I (except possibly at c), sodass $g'(x) \neq 0$ (except possibly at c).

$$\text{Wenn } \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Und entweder $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$
oder $\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = \infty$, dann ist auch:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

27.2.2 Beweis

Write an E-Mail to Mr. Wassermann from the Universaty of Heidelberg and complain about the poor Data Privacy at the Universaty. If he ignores you (which he usualy does) then you won the Proof.

27.2.3 Tayler Reihe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem geschlossenen Intervall und k+1 - mal diffbar sein auf dem offenen Intervall von x bis a, dann existiert ein ξ zwischen x und a, sodass:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \ldots + \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) + R_k(x), \quad R_k(x) = \frac{1}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} f^{k+1}(\xi)$$

wobei $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}(a)$ ist die k-te ableitung von f am punkt a.

Allgemeine Schreibweise von Taylor:
$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

27.2.4 Beweis

Listen to Mongolian Metal, ease your Mind, take a shower. And sit down and write the proof yourself.

28 Differenzierung in Banachräumen

Im Fall von $F : X \to Y$, wobei X,Y Banachräume sind, ersetzen wir die Notation der Ableitung durch die des Differentials.

28.0.1 Richtungsdifferential (Gateuax)

Seien X,Y Banachräume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $F : U \to Y$.
Das Gateaux differential von F an der Stelle $x \in U$ in die Richtung $h \in X$ ist $DF(\cdot,\cdot) : U \times X \to Y$:

$$DF(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = \frac{d}{dt} F(x+th)\bigg|_{t=0}$$

Wenn das Limit für alle $h \in X$ existiert, sagen wir das F Gateaux diffbar ist.
Wenn X ein Reeler Vektorraum ist, nehmen wir das Limit für $t \in \mathbb{R}$, wenn X ein Komplexer Vektorraum ist, dann wird t zur Null auf der Complexen Ebene geschickt.

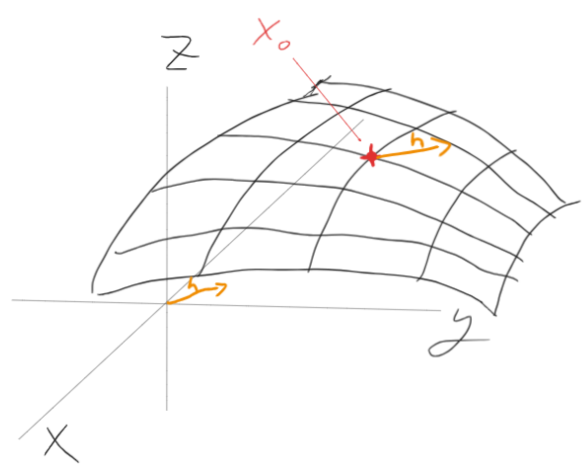
An jedem Punkt $x \in U$ ist die Gateaux differential homogen, es gilt also:

$$DF(x,\cdot) : X \to Y, \quad DF(x,\alpha v) = \alpha DF(x,v)$$

Allerdings ist diese Funktion nicht umbedingt linear. In endlich Dim. Fällen kann es sein, dass sie Linear aber unstetig in x ist.

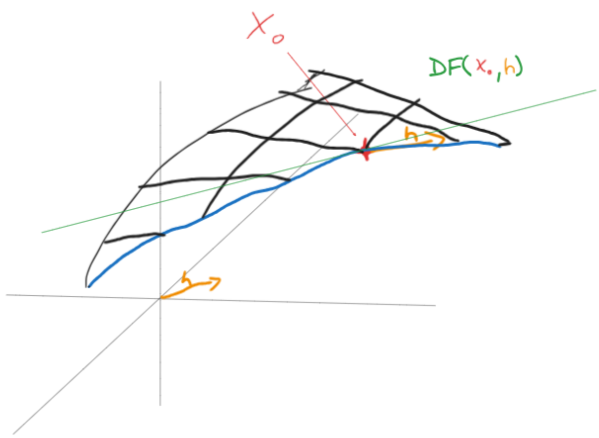
$$DF(x, v + w) \neq DF(x,v) + DF(x,w)$$

Das Gateaux-Differetial misst also ähnlich wie im eindimensionalen (das was wir aus der Schule kennen) die Variation der Funktion, wenn wir uns ein kleines Stück bewegen. Allerdings bewegen wir uns beim Gateaux Differential nun entlang eines bestimmen Vektors (einer Richtung also.) Es ist die beste lineare Näherung an dem Punkt x_0 in die Richtung h. Man kann sich das bei einer Zweidimensionalogen Funktion (also F(x,y)) gut grafisch darstellen.
Dazu nehmen wir $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diese Funktion frisst also zwei Zahlen und spukt uns eine aus. Wenn wir den Graphen dieser Funktion betrachten, also für alle x,y-Paare, deren Funktionswert auf der z-Achse eintragen, bekommen wir einen schönen 3D-Plot.
Dieser könnte so aussehen:



Dabei schauen wir uns jetzt einen Punkt $x_0 = (x_1, y_1)$ an. (Also der Punkt besteht aus aus dem Input x_1, y_1 und gibt uns $F(x_1, y_1)$ aus. Und weiter schauen wir uns den Vektor h an. ***Wichtig:*** *Man muss beachten, dass h nur ein 2D Vektor in der x-y Ebene ist. Also wir können hier keinen Vektor mit z-Komponente betrachten, da es diese Richtung für die Funktion F gar nicht gibt. Erst der Graph der Funktion, der nur zur Veranschaulichung da ist, bringt die z-Komponente mit. Deswegen habe ich h nochmal im Ursprung eingezeichnet.*

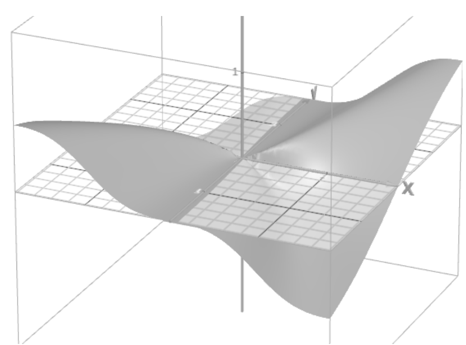
"Schreiden" wir den Graph jetzt entlang des h Vektors auf, erhalten wirn eine Kurve: Die blaue Linie:



Betrachten wir die Blaue Linie jetzt einfach als 1 Dimensionale Funktion (wie in der Schule) ist die Ableitung (Das Gateaux Differential) einfach die Tangente (Steigung) im Punkt x_0. Also die grüne Linie.
Der Grenzwert kann beim Gateaux Diffenretial für einige hs existieren und für andere nicht. Im unendlich Dimensionalen passiert das öfter, dass es das Gateaux diff in manche Richtungen nicht gibt. ***Beispiel dazu*** *Man nehme die Funktion:*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & wenn (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diese sieht btw. so aus:



Diese ist an der Stelle $x_0 = (0,0)$ nicht Gateaux Diffbar., denn betrachtet man sich einen beliebigen Vektor in $\mathbb{R}^2$, also $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, so ergibt sich für das Gateaux Differential:

$$DF(x_0;h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = DF(0,0;hk) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2h^3k}{t^3(h^4+t^2k^2)}$$

An den Potenzen von t kann man bereits erkennen, dieser Grenzwert existiert nicht, sondern geht für $t \to 0$ gegen unendlich.

28.0.2 Frechet Differential

Seien X,Y Banachräume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $F: U \to Y$.
F heißt frechet- ableitbar in $x \in U$, wenn es einen beschränkten linearen Operator $A: X \to Y$ gibt, sodass gilt:

$$\lim_{\|h\|_x \to 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Ah\|_y}{\|h\|_x} = 0$$

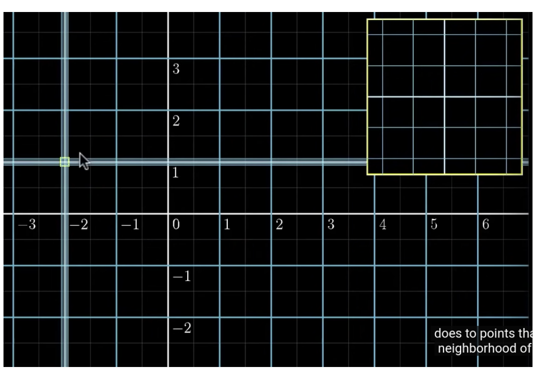
Wenn A existiert ist es einzigartig und wir schreiben auch $A = \mathrm{d}F(x) = \mathrm{d}F|_x$

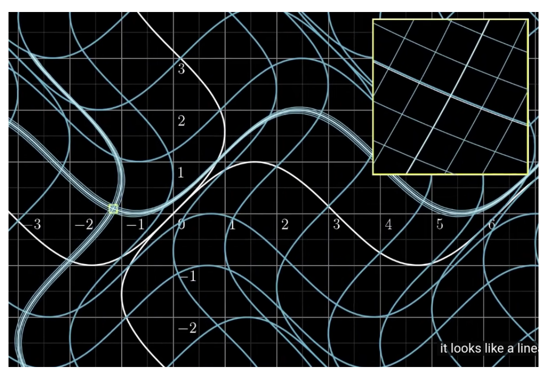
F heißt Frechet stetig diffbar in U oder $\mathcal{C}^1$, wenn das mapping $x \mapsto \mathrm{d}F(x)$ von U zum beschränkten linearen Operator von $X \to Y$, also in $\mathcal{B}_{op}(X,Y)$ zusammen mit der Operator Norm, stetig ist.

Wenn der Definitionsbereich von F gleich $\mathbb{R}$ist, reduziert sich die Frechet Differential zur normalen Ableitung.
Also $\mathrm{d}F|_x : \mathbb{R} \to Y$ ist ein lienarer multiplikations Operator $v \mapsto \mathrm{d}F|_x v = F'(x)v$ welches ein Vektor in Y ist.

Das frechet Differentail ist die Verallgemeinerung der Ableitung in Banachräumen.
Mainly geht es darum einen linearen Operator (also noch eine Funktion von $X \to Y$) zu finden, die die beste Lineare Näherung ist. Was meinst das?
Man stelle sich eine Funktion F vor, die irgendeinen Qutasch mit den Inputs macht, F ist nicht Linear sondern verhunzet unsere Inputs. Wenn man sich das als Transformation vorstellt könnte das so aussehen mit der Beispielfunktion:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x + \sin(y) \\ y + \sin(x) \end{bmatrix}$$





Oben rechts ist der Punkt (-2,1) immer rangezommed dargestellt. Man erkennt: Die Umgebund des Punkts verändert sich rangezommed recht linear. Diese Lienare Approximation suchen wir.

Die Formel:

$$\lim_{\|h\|_x \to 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Ah\|_y}{\|h\|_x} = 0$$

stellt nun sicher, dass wir die beste Lineare Approximation haben, denn wir lassen die Norm unseres Vektors h nach Null laufen, das heißt kongrekt, wenn der ganze Ausdruck null werden soll, dann muss der Zähler "schneller" / "stärker" zur Null werden als der Nenner. (sonst würde am Ende nicht Null rausbekommen), wenn wir uns nun die Norm im Raum Y anschauen, und den Funktionswert von F von $(x_0 + h)$ anschauen und davon den Funktionswert $F(x_0)$ abziehen, dann "bleibt" als Länge nur noch das Bild des Vektors h, also $F(h)$, wenn unser Operator A, der auch einen Vektor aus V nimmt und ihn nach W mapped, nun die beste lineare Approximation ist, dann muss die $Norm_y$ für $F(h) - A(h)$, schneller gegen Null gehen, als h gegen Null geht. Das geht nur wenn das Bild von F und A, weitestgehend übereinsimmen.

Siehe hierzu das gute Yt Video:
Gutes Video zu Frechet
Gutes Video zu Jacobi

28.0.3 Kettenregel

Seien X;Y;Z Banachräume, und $U \subset X$ eine offene Teilmenge: Weiter sei $F : U \to Y$ frechet diffbar in $x_0 \in U$, Weiter sei $V \subset Y$, mit $F(x_0) \in V$ eine offene Menge und $G : V \to Z$ eine frechet diffbar Funktion in $F(x_0)$.

Dann ist $G \circ F$ auch frechet diffbar in x_0, also:

$$\mathrm{d}(G \circ F)|_{x_0} = \mathrm{d}G|_{F(x_0)} \circ \mathrm{d}F|_{x_0} \in \mathcal{B}_{op}(X, Z)$$

Man erkennt, es ist die "gewöhnliche Definition" von Kettenregel, nur dass wir anstatt zu multiplizieren jetzt noch eien Komposition bilden. Weiß der Geier warum. Wenn mans rechnen muss, ist das gleich zum Produkt der Jacobiematrix.

$$J_{f\circ g}(\mathbf{a}) = J_f(g(\mathbf{a}))J_g(\mathbf{a}),$$

28.0.4 Beweis

Get your Head stuck in the washing maschine and scream for your step-bro to help you. When he arrives he will present you the proof.

28.0.5 Gateaux vs. Frechet

- Wenn F an der Stelle x_0 frechet diffbar ist, dann ist F an dieser stelle auch Gateaux diffbar und die beiden Differentiale stimmen überein. $DF(x_0, v) = \mathrm{d}F|_{x_0}(v)$. Die Rückrichtung ist nicht immer Richtig, da das Gateaux differential nicht lienar sein könnte.

- Wenn F Gateaux diffbar im Punkt x_0 ist und das Gateaux Differential $DF(x,\cdot)$ ein beschränkter linearer Operator im zweiten Argument für x ist (In einer Umgebung von x_0) und weiter das Mapping $X \to \mathcal{B}_{op.}(X,Y),\ x \mapsto DF(x,\cdot)$ stetig ist im Punkt x_0, dann ist F stetig frechet diffbar in x_0 und es gilt: $\mathrm{d}F|_{x_0} = DF(x_0,\cdot)$.

28.0.6 Generele Mittelwert Ungleichung

Eine Teilmenge K eines BanachRaumes (oder Vektorraum) heißt Konvex, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ und } t \in [0,1], \text{gilt} \quad (1-t)x_1 + tx_2 \in K$$

Sei $U \subset X$, und $F : U \to Y$ eine stetig diffbare FUnktion auf U, gilt für jede zwei $x_1, x_2 \in K$, wobei K eine convexe kompakte Teilmenge von U ist:

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \left(\sup_{x \in K} \|\mathrm{d}F|_x\|_{op.}\right) \|x_1 - x_2\|$$

Wobei das Supremum endlich ist, weil K kompakt ist.

28.1 Inverse Funktions Hot Take

28.1.1 Beschränktes inverses Hot Take

Sei $A : X \to Y$ ein bijektiv beschränkter linearer Operator von einem Banachraum in einen weiteren. Dann hat A ein Inverses A^{-1} und A^{-1} ist linear.

28.1.2 Beweis

Go drink some Water, you havent drank in a long time. And especially in the Summer in Heidelberg you need a lot of Woa.

28.1.3 Inverses Funktions Hot Take

Sei X und Y zwei Banachräume, $U \subset X$ eine offene Teilmenge von und sei $F : U \to Y$ eine stetig diffbare Funktion auf U. Für jedes $x_0 \in U$, sodass $\mathrm{d}F|_{x_0}$ invertierbar ist, existiert eine offene Menge $V_0 \in Y$, sodass $F(x_0) \in V_0$ und eine weitere offene Menge $U_0 \in X$ gibt mit $x_0 \in U_0$, und eine stetig diffbare Funktion $G : V_0 \to U_0$, sodass insgesamt gilt:

$$F \circ G = id|_{V_0},\ G \circ F = id|_{U_0} \text{und für } , x \in U_0, \mathrm{d}G|_{F(x)} = [\mathrm{d}F|_x]^{-1}$$

Eine Funktion zwischen zwei Banachräumen, die stetig diffbar ist und das Differential nicht "degenerativ ist" hat eine stetig diffbares Inverses.

28.1.4 Beweis

Ask Gurau.

28.2 Der Fall: $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Erinnere:

Wir haben den Dualraum von V mit V^* notiert. Dieser ist ein Vektorraum mit allen Funktionalen von V in seinen Körper. Also $\varphi : V \ \mathbb{K}$ mit $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ zusammen mit den Vektorraumoperationen:

- $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$
- $(\alpha\varphi)(x) = \alpha \cdot \varphi(x)$

Wenn die Dimensionen von V endlich ist und die Basis in V gegeben ist mit $B = \{e_1, ..., e_N\}$, dann besteht die Duale Basis in V^* aus den linearen Funktionalen λ^j, definiert mit:

$$\lambda^j(e_i) = \delta_i^j \text{ also } \lambda^j\left(\sum_{i=1}^{N} v^i e_i\right) = v^j$$

Die duale Basis besteht also aus den Funktionalen, die für genau einen Basis vektor in V eine 1 ausgeben und für alle anderen 0. Das heißt eben auch, wenn wir ein Basisvektor im Dualraum auf einen Vektor im V-Raum anwenden, bekommen wir genau den j-ten Koeffizienten der Linearkombination, also der Darstellung des Vektors in V

Wir notieren nun die Elemente in $\mathbb{R}^M$ mit $y = \sum_{j_1}^{M} y^j f_j$, für eine Basis $\{f_1, ..., f_M\}$, wir notieren die Basiselemente im Dualraum mit

$$\mu^j : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R},\ \mu^j(f_i) = \delta_i^j,\ \text{dann ist } \mu^j\left(\sum_{i=1}^{M} y^i f_i\right) = \sum_{i=1}^{M} y^i \mu^j(f_i) = \sum_{i=1}^{M} y^i \delta_i^j = y^i$$

Da μ ein lienare Operator ist, ist das Frechet Differential von $\mu^j = \mathrm{d}\mu^j|_{y_0} = \mu^j$. Für jede Funktion $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, mit der Basis $B = \{e_1, ..., e_N\}$ schreiben wir:

$$F\left(\sum_{i=1}^{N} x^i e_i\right) = \sum_{j=1}^{M} F^j(x^1, ..., x^N) f_i$$

Wobei F^j die Komponenten von F sind.
Die FUnktion F ist Frechet diffbar im Punkt x_0, genau dann wenn $F^j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ alle frechet diffbar in x_0 sind. Da die Summe von Frechet Diffbaren Funktion wieder frechetdiffbar ist.
Weiternoch wenn F Frechet diffbar ist und μ^j ja eh Frechet diffbar ist, folgt, dass $F^j = \mu^j \circ F$ ist Frechet diffbar und es gilt:

$$\mathrm{d}F^j|_{x_0} = \mathrm{d}(\mu^j \circ F)|_{x_0} = \mu^j \circ \mathrm{d}F|_{x_0}$$

Sei nun ein Vektor $x = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i \in \mathbb{R}^N$, so definieren wir uns die partielle Ableitung:

$$\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0) = DF^j(x_0, e_i) = \frac{d}{dt} F^j(x_0 + te_i)|_{t=0}$$

Partielle Ableitungen sind also nur Gateaux Ableitung entlang den Basisvektoren.

Wenn F Frechet diffbar ist, gilt:

$$\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0) = \mathrm{d}F^j|_{x_0}(e_i)$$

Das Frechet Differential ist dann ein Linearer Operator $\mathrm{d}F|_{x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, dessen Matrix Elemente wie folgt aussehen: (hier ist λ^i die zu e_i duale Basis):

$$\mathrm{d}F|_{x_0} = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} f_j(\mathrm{d}F|_{x_0})^j_i\lambda^i, \text{ wobei } (\mathrm{d}F|_{x_0})^j_i = \mu^j(\mathrm{d}F|_{x_0}(e_i)) = \mathrm{d}F^j|_{x_0}(e_i) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0)$$

Also ist die Matrix des Frechet Differentials $\mathrm{d}F|_{x_0}v = J_F(x_0)v$, die $M \times N$ Jacobie Matrix:

$$J_F(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^N}()x_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^M}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial F^M}{\partial x^N}(x_0) \end{bmatrix}$$

28.2.1 Im Endlich Dimensionalen Fall: stetig Gateaux diffbar folgt frechet diffbar

Sei $U \subset \mathbb{R}^N, F : U \to \mathbb{R}^M$.
Wenn F^j alle stetig partiell diffbar in U sind. (Also diffbar in alle Richtugen von $\mathbb{R}^N$ und in allen Punkten in U), dann ist F auch stetig Frechet diffbar in U.

28.2.2 Beweis

Build yourself a Submarine and dive with it to the Titanic, if you make the Trip without imploding, the Proof will be visable at the Front of the Titanic.

28.2.3 Beispiel:

Betrachte die Funktion: $F : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$F(\theta e_\theta + \varphi e_\varphi) = \sin\theta\cos\varphi f_1 + \sin\theta\sin\varphi f_2 + \cos\theta f_3,\ \mathrm{d}F|_{\theta_0,\varphi_0}(V) = \begin{bmatrix} \cos\theta_0\cos\varphi_0 & -\sin\theta_0\sin\varphi_0 \\ \cos\theta_0\sin\varphi_0 & \sin\theta_0\cos\varphi_0 \\ -\sin\theta_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V^\theta \\ V^\varphi \end{pmatrix}$$

Hier mapped jetzt $\mathrm{d}F|_{\theta_0,\varphi_0}$ den zweidimensionalen Raum tangential zu $(0,\pi) \times (0,2\pi)$ am Punkt (θ_0,φ_0) auf den zweidimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^3$ tangential zu der Sphäre an dem Punkt $F(\theta_0,\varphi_0)$.

28.3 Hot Take der Impliziten Funktionen

Sei $F : U \subset \mathbb{R}^{N+M}\mathbb{R}^M$ eine stetig diffbare Funktion und sei $z_0 \in U$ eine Lösung für die Gleichung $F(z_0) = 0$, sodass $\mathrm{d}F|_{z_0}$ maximalen Rang hat $dim(Im(\mathrm{d}F|_{z_0})) = M$. Wir können nun Parametrisieren: $\mathbb{R}^{N+M} = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}^M\},\ z_0 = (x_0,y_0)$ und:

$$\mathrm{d}F\big|_{(x_0,y_0)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^N}(x_0,y_0) & \frac{\partial F^1}{\partial y^1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^M}(x_0,y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^M}{\partial x^1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F^M}{\partial x^N}(x_0,y_0) & \frac{\partial F^M}{\partial y^1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial F^M}{\partial y^M}(x_0,y_0) \end{array}\right] = \left[\mathrm{d}_\parallel F\big|_{(x_0,y_0)} \middle| \mathrm{d}_\perp F\big|_{(x_0,y_0)}\right],$$

Dabei ist $\mathrm{d}_\perp F|_{(x_0,y_0)}$ invertierbar.
Dann exisieren offene Mengen X_0, Y_0, sodass $x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^N, y_0 \in Y_0 \subset \mathbb{R}^M, X_0 \times Y_0 \subset U$ und eine stetig diffbare Funktion: $f : X_0 \to Y_0$, sodass:

$$\forall (x,y) \in X_0 \times Y_0, \qquad F(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = y$$

Also $F(0)^{-1} \cap (X_0 \times Y_0) = \{(x, f(x)), x \in X_0\}$, weiternoch $F(x, f(x)) = 0$ gilt:

$$\mathrm{d}_\parallel F|_{(x,f(x))} + \mathrm{d}_\perp F|_{(x,f(x))} \mathrm{d}f|_x = 0$$

Nehmen wir uns mal den Einheitskreis als Beispiel, diesen können wir nicht als Funktion f(x)=y darstellen. da es zu einem x immer zwei y gibt, aber wir könnten uns einschränken auf nur einen Teil des Definitionsbereichs und Wertebereichs, (z.b. das Quartal oben Rechts) und dort dann eine Funktion aufstellen, die nur noch von x abhängt.

Der Einheitkreis ist die Menge an Punkten die die folgende Bedingung erfüllt: $x^2 + y^2 = 1$, das können wir aber auch als Funktion schreiben: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Wir betrachen jetzt also Funktionen $F(x,y) = 0$ und schauen uns an für welche Punkte der Lösungsmenge dieser Funktionen wir eine implizite Funktion finden können.
Gegeben muss dann immer ein Punt der Lösungsmenge sein, oder man muss sich einen Aussuchen. Dann schaut man sich die Raumdimension an, in die die Funktion abbildet, wenn es von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ geht, dann ist m = 2 und n = 1, also muss man die Matrix, bis zum m-ten glied aufstellen. In den Meisten Fällen wird m = 1 sein, und die Matrix wird nur eine 1x1 Matrix. (also zumindest die, die uns interessiert, also die mit den m-anteilen)
Dann bildet man das frechet Diffentiel der Funktion an dem Punkt den man als Lösungspunkt gegeben hat und schaut sich die Matrix, der m-ten dimensionen hinten an, wenn diese Invertierbar ist, so gibt es eine Umgebung von dem Lösungspunkt, die wir implizit darstellen können.
Mit $y = \sqrt{1 - x^2}$

28.3.1 Beweis

Take part in the MathPhysInfo Fachschaft and help where it brings you joy. After a while a guy named $[importNamehere] will apear and fortell you the proof.

28.3.2 Verständnisslink

Wer sich nicht nur für die Definition interessiert, sondern das auch gerne verstehen will:
Youtube Video

28.3.3 Guraus Beispiel

Nehmen wir die Funktion $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Für die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ nehme wir nun mal die Lösung $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$ Also ist:

$$\mathrm{d}F|_{0,0,1} = [2x\ 2y \mid 2z]_{0,0,1} = [0\ 0 \mid 2]$$

Da der "M"-Teil der Ableitung, also $\mathrm{d}F_{\perp}|_{0,0,1} = 2$ und damit $\neq 0$ ist, ist der Teil invertierbar. Und in der Umgebung von $(x_0, y_0) = (0,0)$ ist eine Lösung fütr $F(x,y,z)$ gerade die Funktion $z(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, welche stetig diffbar ist und es gilt:

$$\mathrm{d}_{\parallel}F|_{(x,f(x))} + \mathrm{d}_{\perp}F|_{(x,f(x))}\mathrm{d}f|_x = 0$$

Also hier speziell:

$$[2x\ 2y]_{x,y,z(x,y)} + [2z]_{x,y,z(x,y)} \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]_{x,y} = 0$$

Der Naive Leser wird denken (*und ja Gurau fronted dich hier in seinem "Skribd"*) , dass man trotz $\partial_x F(0,0,1) = 0$, die Funktion für x aufstellen kann mit $x = \sqrt{1-x^2-y^2}$ für (y,z) für eine Umgebung von $(y_0, z_0) = (0,1)$. Das ist aber Falsch, da diese Funktion nicht für $z > 1$ definiert ist, und damit schon gar nicht stetig diffbar ist.

28.4 Der Fall $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Wir schränken uns nun auf Reelwertite Funktionen ein $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Wir notieren die partielle Ableitung mit $DF(x_0, e_i) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0) = \partial_i F(x_0)$

28.4.1 Kommutation der partiellen Ableitungen

Sei $U \to \mathbb{R}^N$, $F : U \to \mathbb{R}$, sodass $\partial_i F$, $\partial_j F$ und $\partial_j \partial_i F$ existieren und das $\partial_j \partial_i F$ stetig im Punkt x_0, dann exisitert auch ein $\partial_i \partial_j F$, sodass gilt:

$$\partial_i \partial_j F = \partial_j \partial_i F$$

Also wenn stetig im Punkt x_0, dann kommutieren partielle Ableitungen. Es ist also egal ob man zuerst nach x oder nach y ableitet.

28.4.2 Beweis

Give up, resign, quit, and do what you love to do (it can't be reading this).

28.5 Kritische Punkte

28.5.1 Extrempunkt Kriterium

Sei X ein Banachraum und $U \subset X$ weiter sei $F : U \to \mathbb{R}$ frechet diffbar in U.
Wenn $x_0 \in U$ ein lokales Extrema ist, dann ist $\mathrm{d}F|_{x_0} = 0$

28.5.2 Beweis

Don't drink and derive.
Text me your favorit Book Genre.

28.5.3 Hesse Matrix oder so

Sei $U \subset \mathbb{R}^N, F : U \to \mathbb{R}$, sodass alle seine partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind, so schreiben wir $F \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$

Eine solche Funktion ist Frechet diffbar und es gilt:

$$\mathrm{d}F|_{x_0}(v) = \sum_{i=1}^{N} v^i \mathrm{d}F|_{x_0}(e_i) = \sum_{i=1}^{N} v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}(x_0) = DF(x_0, v)$$

Was das meint ist, wir haben das Frechet differential an der stelle x und multiplizieren darauf jetzt einen Vektor v, (von mir aus $A \cdot v$), dann ist das ident zur gateaux ableitung an der stelle x mit dem richtungsvektor v

Bemerke, dass das Mapping $x \mapsto \mathrm{d}F|_x$ ein Mapping von einem Raum X in den Banachraum der beschränkten linearen Operatoren ist. $\mathcal{B}_{op.}(X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R})$.
Wenn dieses Mapping *Also die Zuordnung eines Punktes zu seinem jeweiligen Frechet Differential* selbst frechet diffbar ist, dann ist das neue Frechet differential $\mathrm{d}^2F|_x$ ein beschränlte lineare mapping von $X \to \mathcal{B}_{op.}(X, \mathbb{R})$ Also $v \mapsto \mathrm{d}F|_x(v)(\cdot)$, dazu äquivalent ist eine billienarform von $X \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{d}^2F|_{x_0}(v, u) = \mathrm{d}(\mathrm{d}F|_{x_0}(u))|_{x_0}(v) = \sum_{i,j=1}^{N} u^i v^j \mathrm{d}(\mathrm{d}F|_{x_0}(e_i))|_{x_0}(e_j) = \sum_{i,j=1}^{N} u^i v^j \partial_i \partial_j F(X)$$

dabei ist $\partial_i \partial_j F(x)$, die reele symmetrsiche Matrix von partiellen Ableitung zweiten grades von F sind. Man nennts die Hesse Matrix.

Die Hesse Matrix sieht wie folgt aus:

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Mathematisch ist die Hessematrix die Transponierte der Jacobimatrix des Gradienten, da sie aber im steigen Falle symmetrisch ist, bewirkt das Transponieren nichts.

28.5.4 Konvexitäts Kriterium

Sei U eine offene konvexe Menge. Und $F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ ist konvex in U, mit

$$F((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)F(x_1) + tF(x_2)$$

genau dann wenn seine Hessematrix eine positiv semidefinite Matrix für alle $x \in U$ hat.

28.5.5 Beweis

Text your Phonenumber Partner, he or she will tell you the Proof.
(Phonenumber partner means to decrease and increase your Phone number by one)

28.5.6 Krittischer Punkt

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ und $F : U \to \mathbb{R}$ frechet diffbare Funktion in U. Ein Punkt x_0, dessen Frechet Differential null ist, also $\mathrm{d}F|_{x_0} = 0$.
In anderen Worten $\forall i, \partial_i F(x_0) = 0$, dann heißt der Punkt x_0 Kritischer Punkt von F.

Wenn nun $F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, dann ist dieser Kritische Punkt ein lokales Minimum, wenn die Hessematrix $\partial_i \partial_j F(x_0)$ positiv definit ist. Und ein Maximum, wenn sie negativ definit ist.

Wenn die Hesse matrix nichts von beidem ist und nicht degenarativ *Also nur Eigenwerte ungleich 0 hat, die positiv und negativ sind* , dann ist der Kritische Punkt ein Sattelpunkt.

Bemerke:
Die Hessematrix ist reel und symmetrisch, also sind die Eigenvektoren zueinander orthogonal.

Für die Variation von F an dem kritischen Punkt x_0 in der Richtung v ist:

$$F(x_0 + v) \approx F(x_0) + \frac{d}{dt} F(x_0 + tv)|_{t=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} F(x_0 + tv)|_{t=0} \approx F(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} H_{ij}(x_0) v^i v^j$$

in der Eigenbasis e_a von H, schreiben wir $v = \sum_a v^a e_a$ und $F(x_0 + v) = F(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \lambda_a (v^a)^2$.

Die Variation von F in die eigendirection (also die richtung in die der eigenvektor zeigt) ist bestimmt durch das jeweilige Vorzeichen des jeweiligen Eigenwertes λ_i.

28.5.7 Guraus Beispiel

Considern wir die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $F(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$. Das heißt die Frechet Ableitung $\mathrm{d}F = (\partial_x F, \partial_y F)$.

Für einen Krititschen Punkt muss die Ableitung null sein, daraus ergibt sich, dass beide Partiellen Ableitungen Null sein müssen:

$$\mathrm{d}F = 0 \Rightarrow \partial_x F = \partial_y F = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Es ist wohl ganz angenhem, wenn man sich den Graphen von F anschaut, das ist dann:

$$\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \overline{F} = (x, y, F(x, y)), \quad \mathrm{d}\overline{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_x F & \partial_y F \end{pmatrix}$$

Am kritischen Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ergibt sich dann $\mathrm{d}\overline{F}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, welches den $\mathbb{R}^2$ auf den zweidimensionalen Raum tangential zum Punt (0,0,0) mapped. *(Ich denke er meint den 3-dimensionaen Raum, dessen 3te Dimension durch die 0 Reihe eliminiert wird)*

Die Hessematrix von F ist die Identitätsmatrix, deswegen ist der Kritische Punkt ein Minumum.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^2} & \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial F}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mein Beispiel:

$$F(x,y) = \frac{x^3 - y^2}{4}$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{d}F = (\partial_x F, \partial_y F) = (\frac{3x^2}{4}, \frac{-2y}{4}) = (0,0) \Rightarrow x_0 = (0,0)$$

Die Funktion F hat also im Punkt $x_0 = (0,0)$ ein kritischen Punkt.

$$\partial_x \partial_y F(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{6 \cdot 0}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{4} \end{pmatrix}$$

Wir können also nichts über die Art des Extrempunktes aussagen.
Tipp: Zum entscheiden, wie definit eine Matrix ist, bilden wir die deteterminanten der Hauptminoren und entscheiden anhand derer:

Für eine symmetrische $n \times n$-Matrix A definieren wir die führenden Hauptminoren $\Delta_1,\ \Delta_2, \dots, \Delta_n$ durch

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \det A$$

(a) A ist **positiv definit** $\Leftrightarrow\ \Delta_i > 0 \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n$

(b) A ist **negativ definit** $\Leftrightarrow\ (-1)^i \Delta_i > 0 \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n$

(c) $\Delta_i > 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\Delta_n = 0 \ \Rightarrow\ A$ ist **positiv semidefinit**

(d) $(-1)^i \Delta_i > 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\Delta_n = 0 \ \Rightarrow\ A$ ist **negativ semidefinit**

(e) $\Delta_n \neq 0$ aber weder (a) noch (b) treffen zu $\Rightarrow A$ ist **indefinit**

(f) $\Delta_k < 0$ für eine gerade Zahl $k \Rightarrow A$ ist **indefinit**

(g) $\Delta_k > 0$ und $\Delta_\ell < 0$ für zwei ungerade Zahlen k und $\ell \Rightarrow A$ ist **indefinit**

(h) Die Matrix A hat mindestens ein positives und mindestens ein negatives Diagonalelement $\Rightarrow A$ ist **indefinit**

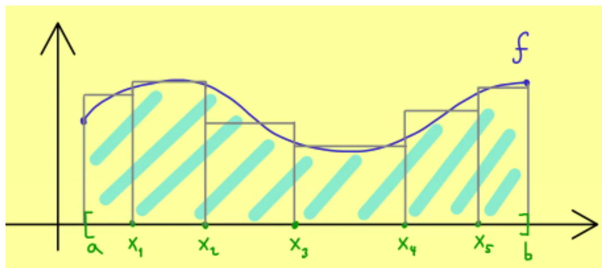
29 Stetige Funktionen einer variable und Stammfunktion

29.0.1 Vorraussetzungen

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein geschlossenes Intervall. Wir notieren $\mathcal{C}([a,b],V)$, als den Raum der stetigen (daher auch beschränkten) Funktionen $f:[a,b] \to V$ abbilden, wobei V ein Banachraum ist. Weiter noch Partionieren wir das geschlossene Intervall jetzt noch:

$$[a,b) = \cup_{i=0}^{r-1} \Lambda_i, \quad \Lambda_i = [s_i, s_{i-1}) \subset [a,b)$$

Im skripd steht, dass es $\in [a,b)$ sein muss, aber eigentlich muss es ja eine Teilmenge sein.
Dabei gilt $a = s_0 < s_1 < s_2 < .... < s_r = b$



Wir notieren $\Pi = \{\Lambda_1 | \Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing, \cup_{i=0}^{r-1} \Lambda_i = [a,b)\}$ als die Menge aller Teile in der Partion.
Wir erinnern uns:
Es gibt ein Ordnung auf der Menge aller Partitionen auf einer Menge, die wie folgt definiert ist:

$$\Pi' \leq \Pi, \text{ wenn } \forall \Lambda' \in \Pi', \exists \Lambda \in \Pi, \text{ sodass } \Lambda' \subset \Lambda$$

Das "Mesh" (manchmal auch inkorrecterweise Norm genannt) von Π ist die größste Länge eines Intervals in Π, also $\delta(\Pi) = max_{i=0,...r-1}|s_{i+1} - s_i|$.
Ein "Tag" ist ein Punkt der zu einem Intervall der Partition gehört, also $\xi_i \in [s_i, s_{i+1})$. Und die Menge aller Tags zu einem Intervall zu einer Partition Π ist dann:

$$\xi_\Pi = \{\xi_i \in \Lambda_i, i = 0, ..., r-1\}$$

Die linksseite Rieman Summe von einer Funktion $f \in \mathcal{C}([a,b],V)$ in der Partition Π sind:

$$S(f,\Pi) = \sum_{i=0}^{r-1} (s_{i+1} - s_i) f(s_i), \text{ oder bei einem beliebigen Tag, } \S(f,\Pi,\xi_\Pi) = \sum_{i=0}^{r-1} (s_{i+1} - s_i) f(\xi_i)$$

29.0.2 Lemma an Eigenschaften

Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{C}([a,b],V)$ gilt:

- $\forall \epsilon, \exists \delta_1, \text{sodass } \forall \Pi, \delta(\Pi) < \delta_1 \Rightarrow \|S(f,\Pi,\xi_\Pi) - S(f,\Pi)\| < \epsilon$, für jede Wahl an Tags aus ξ_Π
- $\forall \epsilon, \exists \delta_1, \text{sodass } \forall \Pi, \delta(\Pi) < \delta_1, \widehat{\Pi} \leq \Pi \Rightarrow \|S(f,\widehat{\Pi}) - S(f,\Pi)\| < \epsilon$
- $\forall \epsilon, \exists \delta_1, \text{sodass } \forall \Pi_1 \forall \Pi_2, \delta(\Pi_1), \delta(\Pi_2) < \delta_1 \Rightarrow \|S(f,\Pi_1) - S(f,\Pi_2)\| < \epsilon$

29.0.3 Existens des Riemann Integral

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und V ein Banachraum und $f : I \to V$ eine stetige funktion. Dann gilt für jedes $a, b \in I$, dass die Folge der linksseitigen Riemans summen konvergiert!

$$S_n(f;a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + k \cdot \frac{b-a}{n})$$

Wir nennen diese Limit das Riemann Integral und notieren es:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f;a,b)$$

29.0.4 Eigenschaften des Riemann Integrals

Sei I ein Interval und $a, b \in I$ mit $a < b$ und V ein Banachraum mit $f \in \mathcal{C}(I, V)$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- Ortientationsflip: $\int_a^b dx f(x) = -\int_b^a dx f(x)$
- Linearität: $\int_a^b dx (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_a^b dx f_1(x) + \lambda_2 \int_a^b dx f_2(x)$ mit dem Hauptsatz folgt das Beispiel: $\int_a^b dx v = v(b-a)$
- Standart beschränkt: $\| \int_a^b dx f(x) \| \leq \int_a^b dx \|f(x)\| \leq \|f\|_{\infty,[a,b]}(b-a)$
- Additivität von Intervallen: $\int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) = \int_a^c dx f(x)$

29.0.5 Stammfunktion

Sei $I^\circ = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und V ein Banachraum.
Eine Funktion $F : I^\circ \to V$ heißt die Stammfunktion von $f : I^\circ \to V$, wenn F differenzierbar auf I° ist und $F'(x) = f(x), \forall x \in I^\circ$

Wenn F die Stammfunktion von f ist, dann gilt für jede Konstante v_0, $F + v_0$ ist die Stammfunktion von f.

Die Stammfunktion zu bestimmen ist eine lineare Operation, also wenn F_1 eine Stammfunktion von f_1 ist und F_2 eine Stammfunktion von f_2, dann gilt:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, \text{ ist eine Stammfunktion von } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

29.0.6 Fundamental Hot Take der Analysis

Betrachten wir $I \subset \mathbb{R}$ und einen Banachraum V und fixiren wir den Punkt $a \in I$.
Für jede stetig Funktion $f \in \mathcal{C}(I, V)$ gilt:

$$F(x) = \int_a^x ds f(s)$$

Also ist dieses Riemann Integral die Stammfunktion von f für I°

Für jede Stammfunktion F von der stetigen Funktion f auf $(a,b) \subset I^\circ$ gilt:

$$\int_a^b ds f(s) = F(b) - F(a)$$

Wenn F in $\mathcal{C}^{k+1}([0,1],V)$ können wir diesen Hot Take k-mal anwenden und erhalten die Taylor Formel mit dem Integral-Rest:

$$F(1) - F(0) = \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q1} F^{(q)}(0) + \frac{1}{k!} \int_0^1 du (1-u)^k F^{(k+1)}(u)$$

Das sollte prob. mit aufs Cheatsheet, also den Integralrest bei der Taylorentwicklung

29.0.7 Der Mittelwertsatz für Integrale

Sei $a.b \in \mathbb{R}, a \leq b$ und $f : [a, b \to \mathbb{R}]$ eine stetige Funktion, dann exisitert ein $\xi \in [a,b]$ sodass gilt:

$$\int_a^b dx f(x) = f(\xi)(b-a)$$

Also ist die Stammfunktion F von f Lipschitz Stetig auf jeder Kompakten Menge $K \subset I$ mit der Lipschitzkonstanten $\|f\|_{\infty,K}$

30 Unbestimmte Integrale, partielle Integration und Substitutuinsregel

In manchen Fällen müssen wir das indefinite Riemann Integral bestimmen:
Für $I = (\alpha, \beta), \alpha, \beta \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$, wir wählen nun $x_0 \in (\alpha\beta)$ und definieren folgendes:

$$\int_\alpha^\beta dsf(s) = \lim_{a\to\alpha} \int_\alpha^{x_0} dsf(s) + \lim_{b\to\beta} \int_{x_0}^b dsf(s)$$

Aber nur wenn diese Limits existiren. Und wenn sie existiern, dann ist $\int_\alpha^\beta dsf(s)$ unabhängig von dem Punkt x_0.

Die Leibnitzgerel und Kettenregel der Differenzierung implizieren nun folgende Regeln.

30.0.1 Substitution

Wenn $F \in \mathcal{C}^1(I, V)$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(I, V)$ ist und $\tau : J \to I$ stetig diffbar, dann ist $F \circ \tau$ eine Stammfunktion von $(f \circ \tau)\tau'$:

$$\int_a^x dsf(s) = \int_{\alpha,\tau(\alpha)=a}^{\beta,\tau(\beta)=b} duf(\tau(u))\tau'(u)$$

Dabei muss τ keine Bijektion sein.

30.0.2 Partielle Integration

Wenn V eine Banach Algebra ist (siehe dazu um Roland LA2 Skript nach, was eine Algebra ist, wenns dich interessiert) und $F \in \mathcal{C}^1(I, V)$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{C}(I, V)$ und G eine Funktion mit $G \in \mathcal{C}^1(I, V)$, dann gilt:

$$F(x) \cdot G(x) - \int_a^x dsF(s) \cdot G'(s), \quad \text{ist eine Stammfunktion von} (f \cdot G)(x) = f(x) \cdot G(x),$$

oder dazu äquivalent:

$$\int_a^x dsF'(s)G(s) = F(x)G(x) - F(a)G(a) - \int_a^x dsF(s)G'(s)$$

30.1 Integral mit einem Paramter

Das Kartesische Produkt von Topologischen Räumen $\times_{i\in I}$ kann mit der Struktur der Box-Topologie endowed werden.

$$(\times_{i\in I} U_i \text{ mit } U_i \text{ offene in } X_i)$$

oder mit der Produkt Topologie

$$\times_{i\in I} U_i \text{ mit } U_I \text{ offen in } X_i \text{ und } U_j \neq X_j \text{ nur für } j \in J \subset I \text{ und J endlich.}$$

Wenn I schon eine endliche Menge ist, dann sind die zwei Topologien ident und die Basis in der Produkt Topologie ist $\times_{i\in I} B_i$ wobei B_i durch die Basis in den Topologien X_i durchläuft.
Für eine endliche Anzahl an metrischen Räumen $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ ist die Produkt Topologie generiert durch die Metrik:

$$d(x,y) = \max_{i\in\{1,...,n\}} \{d_i(x_i, y_i)\}$$

Hier ist ein Offener Ball dann:

$$B_r(x_1,...,x_n) = \{(y_1,...,y_n) | d_i(x_i,y_i) < r,\ i = 1,..,n\} = \bigtimes_{i=1}^{n} \{d(x_i,y_i) < r\} = \bigtimes_{i=1}^{n} B_r^{(d_i)}(x_i)$$

Wobei $B_r^{(d_i)}(x_i)$ der Ball mit dem Radius r in der Topologie X_i um den Punkt x_i ist(natürlich bezüglich der Distanzfunktion d_i).
Ein offener Ball um den Punkt $x = (x_1,...,x_n) \in U$ in der Produkt Topologie ist $\bigtimes_{i=1}^{n} B_r^{(d_i)}$ und enthält $B_r(x)$ mit $r < \min_{i\in\{1,...,n\}}\{r_i\}$.
Demnächt enthält jeder $B_r(x)$ jedes $\bigtimes_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$ mit $r_i < r, \forall i$.

30.1.1 Differenzieren unter dem Integral

Sei $U \subset X$ eine offene Menge in einem Banachraum und $F : [a,b] \times U \to Y$ eine stetige Funktion in einen anderen Banachraum Y. Dann gilt für die Funktion:

$$G : U \to Y, \qquad G(x) = \int_a^b ds F(s,x)$$

Diese ist stetig.
Wenn Y endlich dimensional ist und das Mapping $x \mapsto F(t,x)$ Gateaux diffbar in die Richtungen $v \in U$ und das Mapping $(t,x) \mapsto DF(t,x;v)$ stetig ist, dann ist G auch in die RIchtung $v \in U$ Gateaux diffbar und es gilt:

$$DG(x:v) = \int_a^b ds DF(s,x:v)$$

Ähnliches gilt für Frechet Differential.

Irgendso eine Regel gibt weiterbin den Zusammenhang:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b dx f(x,t) = \int_a^b dx \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$$

Ist dafür vorallem wichtig!

30.1.2 Verständnisslinks

Erklärvideo 1
Video 2 - Nochmal das selbe aber anderer Typ erklärts

30.1.3 Beweis

Take a small Portion of TNT, such that the Explosion from it is Loud, but the destruction Radius smaller than r with $r < 20cm$. Then bury the tnt in your garden, and build a Radio Controlled activation device such that the next time your parents have a garden party, you can detonate the tnt, when no one is arround the TNT, such that every Person shits themselves of fear. After collecting every shitty pants, you need to drop them all at once to the floor. The pants will fall in a way, such that you see the proof of this.

30.2 Limits des Rieman Integrals

Obwohl das Riemann-Integral perfekt für kontinuierliche Funktionen auf kompakten Intervallen geeignet ist, lässt es sich nicht ohne weiteres über diese Klasse hinaus verallgemeinern. Man sagt, dass eine Funktion Riemann-integrierbar ist, wenn die partiellen Riemann-Summen (wenn man das Mesh der Partition auf Null schickt) zu einem Grenzwert konvergieren, der von den Tags unabhängig ist. Man kann notwendige und hinreichende Bedingungen formulieren für die Riemannsche Integrabilität einer Funktion formulieren, aber letztere sind nicht besonders einfach. Außerdem sind im Allgemeinen die Funktionen die als Grenzwerte von Folgen von Riemann-integrierbaren Funktionen erhalten werden, nicht Riemann-integrierbar sind. Zum Beispiel die charakteristische Funktion der rationalen Zahlen:
1Q(x) = 1 für $x \in \mathbb{Q}$ und 1Q(x) = 0 sonst
ist nicht integrabel auf jedem Intervall: Die Riemannschen Summen mit nur rationalen Gliedern ergeben die Länge des Intervalls, während die Summen mit irrationalen Gliedern Null ergeben. Diese Mängel werden behoben, wenn man zum Lebesgue-Integral übergeht, was wir später tun werden. In Vorbereitung auf diese "Generalisierung" werden wir nun das Riemannsche Integral in mehreren Variablen von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus betrachten.

31 Rieman Integral in $\mathbb{R}^n$

Es ist hier, dass ich zumindest für die jetizge Klausurenphase keinerlei Motivation mehr verspüre dieses Dokument weiterzuführen.
Jenachdem werde ich zumindest das Höma 2 Skript irgendwann noch fertigstellen. Aber dieser Tag wird nicht heute und nicht morgen sein. Letzendlich werde ich wahrscheinlich zu DiffGeo erst nach der Klausur wirklich Zeit haben dieses Thema zu verstehen.

Captain Out.